分析力学基础

梅凤翔
刘桂林 编著

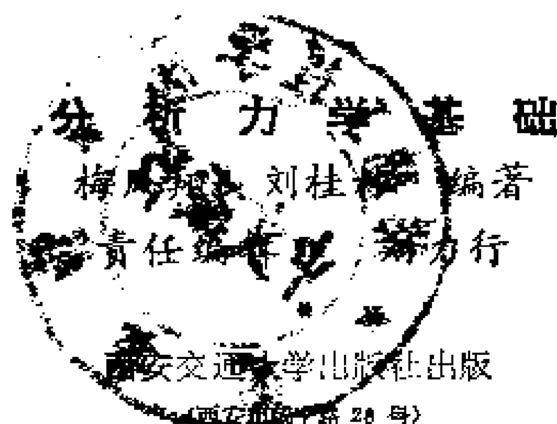
西安交通大学出版社

内 容 提 要

本书内容包括分析力学的基本概念、虚位移原理与分析静力学、达朗伯原理和动力学普遍方程、拉格朗日方程、拉格朗日方程的应用、尼尔森方程、哈密顿正则方程及其积分方法、力学的变分原理、非完整系统力学初步等九章。全书共配有90多个例题，150道习题，其中有些习题附有答案。讲授约需40学时。

本书特点是：起点适当；既强调分析力学的基本理论又注意分析方法；既讨论经典问题又介绍某些近代问题；既有基本部分又有较深入的专门部分，便于读者选用。此外，例题和习题较多，习题难度适中。

本书可作为高等院校理工科力学专业、有关的数学、物理和其他专业大学生和研究生的教材，也可作为教师、科研人员和技术人员的参考书。



分析力学基础

梅[illegible] 刘桂[illegible] 编著

责任[illegible] [illegible]行

西安交通大学出版社出版

(西安[illegible]路28号)

西安交通大学出版社印刷厂印装

陕西省新华书店发行　各地新华书店經售

*

开本 787×1092 1/32 印张13 字数：274 千字

1987年7月第1版　1987年11月第1次印刷

印数：1—2000册

ISBN7-5605-0031-5/O-11　定价：2.35元

前　言

1. 分析力学的历史和现状

分析力学是应生产的要求而产生并随生产的发展而发展起来的。18 世纪以来，由于机械工业的大发展，提出了大量新的力学问题。这些问题的主要特点是需要处理由互相约束的许多物体所组成的物体系统。分析力学就是在解决这些问题的过程中发展起来的。法国学者拉格朗日(Lagrange)于1788 年发表了名著"Mécanique Analytique"(分析力学)，从而奠定了分析力学的基础。英国学者哈密顿(Hamilton)于 1834 年提出哈密顿原理和哈密顿正则方程，把分析力学推向前进。分析力学继承了以前力学发展的成果，给出解决力学问题的统一观点和方法，它开辟了解决受约束的物体以及更复杂的物体系的运动和平衡问题的新途径，从而把理论力学推向新的阶段。1894 年，德国学者赫兹(Hertz)第一次提出把约束和系统分为完整的和非完整的两大类，从而开辟了非完整系统分析力学的新纪元。分析力学的这一分支已获得很多成果，但是还存在着不少问题有待人们去解决。近年来，由于科学技术的高速发展，建立了许多新学科，如宇宙力学，自动控制，运动和过程的控制理论，一般链式系统(人体模型、操纵器、链系等)理论等，这些新学科都与分析力学密切相关，互相渗透。可以相信，随着生产的发展，分析力学将会有广阔的前景。

2. 分析力学的内容，它与其它学科的联系

分析力学的基本内容是阐述力学的普遍原理，由这些原理导出基本运动微分方程，并研究这些方程本身以及它们的积分方法。

我们常常把理论力学理解为静力学、运动学、点和系统的动力学三大部分。它是以牛顿定律为基础的。

分析力学与理论力学的不同点在于：从研究方法上看，理论力学主要是采用数学中的几何法，而分析力学主要采用的是数学中的分析法；从研究观点上看，理论力学侧重于力，而分析力学侧重于能量。

由于分析力学以普遍的力学变分原理来建立系统的运动方程，它具有高度的统一性与普遍性，特别有利于处理受约束非自由质点系问题，并便于扩展到其他学科的领域中去。

分析力学不仅可用于研究质点、刚体与质点系的平衡与运动，而且可用于研究连续介质（固体及流体）力学。

分析力学还广泛用于工程技术领域，如宇宙力学、自动控制、运动和过程的控制理论、一般链式系统理论等许多近代学科。

本书初稿在北京工业学院多次付印使用，并为不少兄弟院校采纳。在教学实践的基础上，这次又作了修改。改写时力图既强调分析力学的基本理论又强调分析力学的基本方法；既照顾到全面又照顾到重点；既考虑到经典问题又考虑到某些近代问题。这些，也是本书的特点。

本书共分九章。前三章是基础部分：第一章除介绍到约束、广义坐标、虚位移、约束反力、理想约束等基本概念

外，还讨论了实位移处于虚位移中的充要条件，并提出了作者自己的观点。第二章介绍虚位移原理与分析静力学，用大量例题说明虚位移原理的各种应用。第三章是达朗伯原理和动力学普遍方程。第四章和第五章介绍拉格朗日力学。第四章是拉格朗日方程及其积分理论。第五章介绍了拉格朗日方程的各种专门应用，其中对变质量系统、带参数约束的系统、包含伺服约束的系统等的应用还是比较新的内容，特别是关于拉格朗日力学的逆问题更是近十年来引人注目的研究课题。第六章介绍尼尔森方程。尼尔森方程与拉格朗日方程一样也是建立完整系统广义坐标中的动力学微分方程的规则。第七章介绍哈密顿力学的基本内容，包括正则方程、泊松定理、哈密顿——雅科比方法、正则变换等。第八章介绍力学的变分原理，特别对哈密顿原理的近代说法进行了详尽的讨论。第九章是非完整系统力学初步，除介绍罗兹方程、阿沛尔方程外，还讲了查浦雷金方程和广义尼尔森方程。

本书可作理工科院校力学专业或其它有关专业大学生及研究生的教材。课时约 40 学时。带星号的章节可为研究生讲授。本书也可作有关教师和科研人员、工程技术人员的参考书。

作者在写作中曾与北京工业学院理论力学教研室的同志们进行了有益的讨论并得到他们的大力支持，特别是讲授过这门课的胡助教授、褚亦清教授和刘恩远同志，他们积累的丰富教学经验，作者力图在本书中加以吸收。本书承西安交通大学理论力学教研室许庆余副教授审阅，并提出了很好的意见，特此一并致谢。

限于作者水平，本书难免有疏漏之处，恳切希望读者指正。

作　者

1985年4月

目　录

第五章　拉格朗日方程的应用

第六章　尼尔森方程*

第七章　哈密顿正则方程及其积分方法

第八章　力学的变分原理

第九章　非完整系统力学初步*

第一章　分析力学的基本概念

分析力学的全部定理和方程都起源于某些基本概念，如约束、虚位移等。

第一节　约束、约束的分类

1. 约　束

我们研究一质点系相对于某个惯性坐标系的运动。对系统的点的位置和速度，常事先加上一些几何的或者运动学特性的限制，这些限制称为约束。

例如，火车被限制在铁轨上运动，火车的轨迹是事先给定的，铁轨是火车的约束。又如，枪弹在出枪口之前被限制在枪膛内运动，枪膛是枪弹的约束。但是，不能认为枪弹出了枪膛以后被约束在抛物线上运动。这是因为枪弹在膛外的轨迹是通过动力学关系与初始条件得到的，并非事先给定的。

限制刚体内任意两点间的距离保持不变是约束；限制质点只能在事先给定的某一曲线上运动是约束；限制圆球在粗糙水平面上无滑动地滚动是约束，等等。

受有约束的系统称为非自由系统。反之，没有约束的系统称为自由系统。在同样的主动力作用下，非自由系统与自由系统相比较，加于系统各点上的约束限制了系统的某些可能的运动。自由系统在主动力作用下可在空间中任意运动。

由约束所加的限制对于实际问题和各种技术领域具有专门的用途。例如，可控力学系统本身就是带有制约给定运动状态的确定的约束系统，而用相应的控制装置来实现这种约束便是技术问题。

必须注意，当系统运动时，不论作用于其上的力以及运动的初始条件如何，约束关系都必须得到满足。

2. 约束方程

一般的约束条件都可用约束方程或约束不等式来表达。怎样根据条件写出具体的约束方程呢？这就要利用几何学和运动学知识，写出具体的数学表达式。

例1. 两个质点用长为 l 的刚性杆相联结。若设两质点在空间某固定直角坐标系中的坐标分别为(x_1, y_1, z_1)及(x_2, y_2, z_2)，则表达其间距离为常值 l 的约束方程为

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-l^2=0 \quad (1\text{-}1)$$

这是加在点的位置上的几何限制。不论作用于系统的力如何，也不管运动的初始条件怎样，(1-1)都必须得到满足。

例2. 两个质点用变长度 $l=f(t)$的杆相联结。

类似于例1，约束方程为

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-f^2(t)=0 \quad (1\text{-}2)$$

其中 $f(t)$ 为时间 t 的已给函数。这是加在点的位置上的几何限制。(1-2)不同于(1-1)的，仅在于不同时刻，两点间距离不同而已。

例3. 两个质点在半径为R的固定球面上运动，两点间距离保持为常值。

以固定球面中心为原点，取一固定直角坐标系，两质点的坐标分别为(x_1, y_1, z_1)及(x_2, y_2, z_2)，则两点间距离保持

为常值 l 的条件为

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-l^2=0 \tag{1-3}$$

而两点在半径为 R 的固定球面上的条件分别为

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2-R^2=0 \tag{1-4}$$

$$x_2^2+y_2^2+z_2^2-R^2=0 \tag{1-5}$$

方程(1-3)、(1-4)及(1-5)就是加于这系统的点的位置上的三条几何限制。

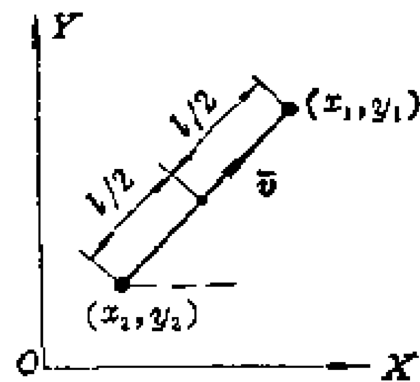


图 1-1

例4. 平面上两质点由一长度为 l 的刚性杆联结，运动中杆中点的速度只可以沿着杆向（如冰刀在冰面上的运动）(图1-1)。因而约束方程可表为

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-l^2=0 \tag{1-6}$$

$$\frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{x_1-x_2}=\frac{\dot{y}_1+\dot{y}_2}{y_1-y_2} \tag{1-7}$$

3. 约束的分类

当应用基本原理推导运动微分方程时，约束本身的性质有极大的影响，不仅系统运动的形式，而且研究运动时选取的方法等都要看约束的性质。可按各种特征将约束分类，例如分为单面与双面，完整与非完整，稳定与不稳定，线性与非线性，一阶与高阶，理想与不理想等等。

(1) 单面约束与双面约束

在约束方程中用严格的等号表示的约束称为双面约束（也叫固执约束）。例如(1-1)、(1-2)、(1-3)、(1-4)、(1-5)、(1-6)、(1-7)都是双面约束。所谓双面约束是指点在

两个方面都受到限制的约束。例如，约束 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 表明，质点在每一时刻都在半径为 R 的球面上，既不能跑到球面的外部，也不能跑到球面的内部。质点好象处于两个无限接近的球面之间，在两个方面都受到限制。

反之，用不等号表示的约束称为单面约束（也叫非固执约束）。因此，单面约束表明，点或者处于曲面上；或者在一个方面离开曲面。例如，约束 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 表明，点或者在半径为 R 的球面上，或者向球的内部移动，但不能跑到球的外部。

今后，我们主要研究双面约束。

(2) 完整约束与非完整约束

一、在力学系统中，其方程用坐标 x_i, y_i, z_i($i=1, 2,\cdots,N$)及时间 t 的解析方程或有限方程（非微分方程）来表示的约束叫完整约束。例如，(1-1)、(1-2)、(1-3)、(1-4)、(1-5)、(1-6)都是完整约束。完整约束方程的一般形式为

$$F_\alpha(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,\cdots,x_N,y_N,z_N,t)=0$$
$$(\alpha=1,2,\cdots,l<3N) \tag{1-8}$$

当存在完整约束(1-8)时，系统不能在每一时刻在空间取任意位置。完整约束是在时刻 t 加在系统可能位置上的限制。

二、如果约束方程是用坐标的不可积分的微分方程来表示的，即方程中不仅包含坐标而且还包含其对时间的导数，则叫非完整约束（也有人叫不完整或非全定约束）。例如，(1-7)就是非完整约束。又如，约束方程

$$\dot{z}e^{x}-\dot{y}=0 \tag{1-9}$$

是关于 x,y,z 的微分方程，它在一般情形中是不能积分的，因此是非完整约束。

非完整约束方程的一般形式为

$$\Phi_\beta(x_1,y_1,z_1,\cdots,x_N,y_N,z_N,\dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{z}_1,\cdots,\dot{x}_N,\dot{y}_N,\dot{z}_N,t)=0$$
$$(\beta=1,2,\cdots,g<3N) \quad (1\text{-}10)$$

方程(1-10)的不可积性在于，它的左边不能成为某个仅是坐标函数的全微分。

当系统有形如(1-10)的不可积分的微分约束时，在任意时刻 t，系统可在空间取任意位置，但点的速度就不是任意的了。非完整约束是对质点、速度所加的限制。例如，约束(1-9)是对速度 $\dot{y}$、$\dot{z}$ 的限制，但坐标 x、y，z 可任意选取。

如果在约束(1-10)中，函数 Φ_β 相对 $\dot{x}_1,\dot{y}_1,\cdots,\dot{z}_N$ 是线性的，则称为线性非完整约束；否则，称为非线性非完整约束。线性非完整约束形如

$$\sum_{i=1}^{N}(a_{\beta i}\dot{x}_i+b_{\beta i}\dot{y}_i+c_{\beta i}\dot{z}_i)+d_\beta=0 \quad (1\text{-}11)$$
$$(\beta=1,2,\cdots,g)$$

其中系数 $a_{\beta i},b_{\beta i},c_{\beta i},d_\beta$ 是坐标及时间的函数。如(1-7)、(1-9)都是线性非完整约束。

三、在完整约束与非完整约束之间有一种约束，这种约束也是用微分方程来表示的，但是这微分方程是可积分的。这种约束可归结为包含积分常数的有限关系式。例如，约束

$$x\dot{x}+y\dot{y}-\dot{z}=0 \quad (1\text{-}12)$$

它也是微分方程，但可积分。此方程有解

$$2z=x^2+y^2+e$$

其中 e 为积分常数，它表示一族双曲抛物面，其鞍点在 z 轴上。

这种以微分形式表示但可积分的约束称为半完整约束。

四、非完整约束又有一阶与高阶之分。如果非完整约束方程中仅有速度而无加速度和坐标对时间的更高阶导数，则称为一阶非完整约束。如约束(1-7)、(1-9)、(1-12)都是一阶非完整约束。

反之，如果约束方程中不仅出现速度而且还有加速度或坐标对时间的更高阶导数，则称为高阶非完整约束*。此时，对约束的定义应给予扩充。

今后，我们主要研究完整约束。

(3) 稳定约束与不稳定约束**

约束可分为依赖于时间的约束和不依赖于时间的约束。如果时间 t 不明显地出现于约束方程中，则称稳定约束。反之，如果时间 t 明显地出现于约束方程中，则称为不稳定约束。

例如，约束

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1-13}$$

是稳定约束。它表示点在半轴长为 a、b、c 的固定椭球面上。

约束

$$\frac{x^2}{a^2t^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1-14}$$

是不稳定约束。这一约束表明，点在运动过程中保持在椭球面上，但此椭球面的一个轴随时间 t 改变自己的量值，亦即点在变形的椭球面上。

约束

$$(x-5t)^2+y^2+z^2=R^2 \tag{1-15}$$

---

* 参考文献(36)

** 有的书上称为“定常约束”与“非定常约束”。

也是不稳定约束。在此情形，球心以等于5单位的速度沿x轴移动，而处于球面上的点随其一起移动。

因此，对单个质点，稳定约束表示点在不随时间而变形且不随时间移动的曲面上；而不稳定约束表示点或者保持在随时间变形的曲面上或者保持在随时间移动的曲面上。

具有稳定约束的系统与具有不稳定约束的系统，在运动性质上和研究方法上都有着本质的区别。而且，具有不稳定约束的系统要比具有稳定约束的系统研究起来一般要复杂得多。

第二节　广义坐标、广义速度和广义加速度

分析力学的特色之一，就是在研究力学系统运动时采用“广义坐标”的概念。

1.　广义坐标

我们把凡是能够确定系统位置的、适当选取的独立变量叫做广义坐标。广义坐标比笛卡儿直角坐标意义更广泛。广义坐标可以是距离、角度、面积以及其它的量。特别地，曲线坐标，如平面上的极坐标，空间中的柱坐标和球坐标等，都可选作广义坐标。

我们可将系统的直角坐标用广义坐标来表示。当在所研究的系统上加上约束时，从直角坐标过渡到广义坐标是特别方便的，而且也是十分必要的。例如，图1-2所示的质点系统，小球m_1用长l_1的轻杆拴于固定点O，小球m_2用长l_2的轻杆拴于小球m_1上，系统运动时保持在铅垂平面内。为确定系统的位置，可选小球m_1的直角坐标(x_1, y_1)及小球

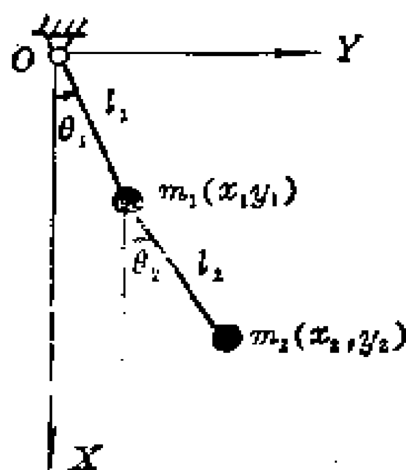


图 1-2

m_2 的直角坐标 (x_2, y_2)，这四个量之间有两个完整约束方程，即

$$x_1^2+y_1^2=l_1^2 \tag{1-16}$$

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=l_2^2 \tag{1-17}$$

因此，只需在 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 中各选一个，例如选定 x_1，x_2 则 y_1，y_2 将由(1-16)、(1-17)确定，于是便可确定系统的位置。

现在，我们选两轻杆与铅垂线的夹角 θ_1、θ_2 为广义坐标。因为，当给定 θ_1 时，则 m_1 的位置便确定；当给定 θ_2 时，则 m_2 相对 m_1 的位置便确定。因而给定 θ_1，θ_2 则系统位置完全确定。此时，用广义坐标表示直角坐标，有

$$\left.\begin{aligned}
x_1&=l_1\cos\theta_1\\
y_1&=l_1\sin\theta_1\\
x_2&=l_1\cos\theta_1+l_2\cos\theta_2\\
y_2&=l_1\sin\theta_1+l_2\sin\theta_2
\end{aligned}\right\} \tag{1-18}$$

而约束方程(1-16)及(1-17)将自动满足。可见，选取 θ_1，θ_2 为广义坐标比选取 x_1，x_2 要方便得多。

一般地，假设力学系统由 N 个质点组成，第 i 个质点的直角坐标为 $x_i,y_i,z_i(i=1,2,\cdots,N)$，系统加上 l 个完整约束

$$F_\alpha(x_i,y_i,z_i,t)=0 \tag{1-19}$$

$$(\alpha=1,2,\cdots,l<3N \quad i=1,2,\cdots,N)$$

我们可以选取 $n=3N-l$ 个独立的广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_n$，这时系统所有点的直角坐标可用广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 及时间 t 表示为

$$\left.\begin{aligned} x_i&=x_i(q_1,q_2,\cdots,q_n,t)\\ y_i&=y_i(q_1,q_2,\cdots,q_n,t)\\ z_i&=z_i(q_1,q_2,\cdots,q_n,t)\end{aligned}\right\} \qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{1-20}$$

或者写成矢量形式

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1,q_2,\cdots,q_n,t) \qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{1-21}$$

如果约束是稳定的，那么可以如此选择广义坐标：使 t 不出现于(1-20)中。因此，(1-21)在稳定约束下写成

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1,q_2,\cdots,q_n) \tag{1-22}$$

注意到，如果时间 t 明显地出现于方程(1-20)中，还不能说约束肯定是不稳定的，因为这些方程的形式是与广义坐标的选取相联系的。而如果从(1-20)中消去广义坐标之后，对固定直角坐标系而言，所得直角坐标之间的关系式中仍明显含 t，则约束是不稳定的，否则是稳定的。

于是，为了求得给定质点系的运动，只要先求出广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 作为时间的函数，然后将其代入(1-20)求出全部直角坐标作为时间的函数。但是，为求得广义坐标 q_s($s=1,2,\cdots,n$)就必须有相对 q_s 的微分方程。在分析力学中，我们就给出建立这种方程的法则。

例1. 空间中运动的自由质点

质点在空间中的位置可用它的直角坐标(x,y,z)来确定，

也可用柱坐标(r, ψ, z)来确定(图 1-3a)， 柱坐标是广义坐标。我们取$q_1=r$， $q_2=\psi$， $q_3=z$ 则直角坐标与柱坐标之间的联系为

$$\left.\begin{aligned}x&=r\cos\psi=q_1\cos q_2\\y&=r\sin\psi=q_1\sin q_2\\z&=z=q_3\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}23)$$

我们还可以取球坐标(r, φ, θ)作为广义坐标(图 1-3b)

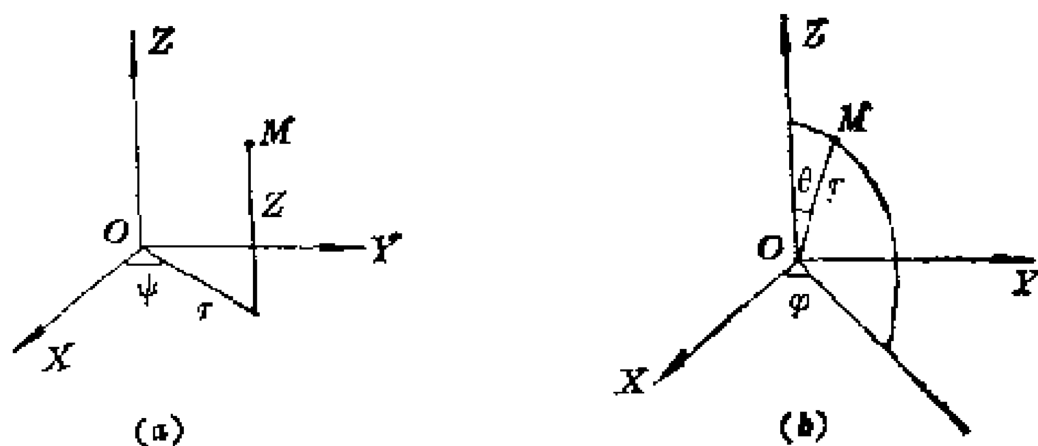


图 1-3

$$q_1=r,\ \ q_2=\varphi,\ \ q_3=\theta$$

于是

$$\left.\begin{aligned}x&=r\sin\theta\cos\varphi=q_1\sin q_3\cos q_2\\y&=r\sin\theta\sin\varphi=q_1\sin q_3\sin q_2\\z&=r\cos\theta=q_1\cos q_3\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}24)$$

例2. 自由刚体

为确定自由刚体在空间的位置，可选刚体上某一点 A 的直角坐标 x_A， y_A， z_A 以及确定与刚体固联的轴 $A\xi\eta\zeta$ 相对于固定坐标系 $OXYZ$ 转动的三个欧拉角ψ， θ， φ为广义

坐标（图 1-4）。

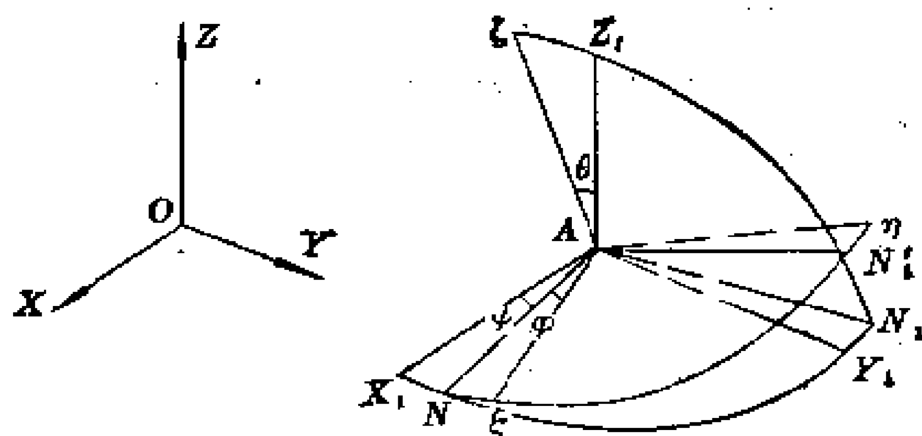


图 1-4

欧拉角这样确定：由点 A 引三个轴 AX_1，AY_1，AZ_1 分别和空间固定轴 OX，OY，OZ 相平行且同向。平面 $A\xi\eta$ 与平面 AX_1Y_1 的交线 AN 称为“节线”。轴 AZ_1 和轴 $A\zeta$ 之间的夹角 θ 称为“章动角”；轴 AX_1 与轴 AN 之间的夹角 ψ 称为“进动角”；轴 AN 与轴 $A\xi$ 的夹角 φ 称为“自旋角”。

三面体 $OXYZ$ 沿 OX，OY，OZ 分别移动 x_A，y_A，z_A 便到 $AX_1Y_1Z_1$ 的位置。依次绕轴 AZ_1 转一角 ψ，绕轴 AN 转一角 θ，绕轴 $A\zeta$ 转一角 φ，三面体 $AX_1Y_1Z_1$ 便转到 $A\xi\eta\zeta$ 的位置。

因此，x_A，y_A，z_A，ψ，θ，φ 的值就决定了三面体 $A\xi\eta\zeta$ 相对于三面体 $OXYZ$ 的位置，即给定了刚体相对于固定坐标系的位置。

刚体上任意一点可由其在 $A\xi\eta\zeta$ 中的坐标 ξ，η，ζ 来确定，此点在 $OXYZ$ 中的坐标 x，y，z 可写作广义坐标 x_A，y_A，z_A，ψ，θ，φ 的函数。

坐标系 $AX_1Y_1Z_1$ 与 $A\xi\eta\zeta$ 轴间夹角余弦列表如下：

	X_1	Y_1	Z_1
ξ	$\cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta$	$\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta$	$\sin\varphi\sin\theta$
η	$-\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\theta$	$-\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta$	$\cos\varphi\sin\theta$
ζ	$\sin\psi\sin\theta$	$-\cos\psi\sin\theta$	$\cos\theta$

因此

$$\left.\begin{aligned}x=&x_A+\xi(\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\sin\varphi\cos\theta)\\&-\eta(\cos\psi\sin\varphi+\sin\psi\cos\varphi\cos\theta)+\zeta\sin\psi\sin\theta\\y=&y_A+\xi(\sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\sin\varphi\cos\theta)\\&+\eta(-\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\varphi\cos\theta)-\zeta\cos\psi\sin\theta\\z=&z_A+\xi\sin\varphi\sin\theta+\eta\cos\varphi\sin\theta+\zeta\cos\theta\end{aligned}\right\}\tag{1-25}$$

在动力学研究中，常取质心为 A 点。

例3. 四连杆机构

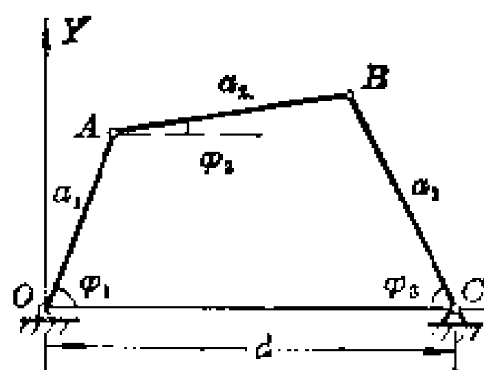


图 1-5

如图 1-5 所示。为确定系统的位置，我们先选两铰链的直角坐标 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$，但有三个约束方程

$$\left.\begin{aligned}&x_1^2+y_1^2=a_1^2\\&(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=a_2^2\\&(d-x_2)^2+y_2^2=a_3^2\end{aligned}\right\}\tag{1-26}$$

其次，如果选三个角 φ_1，φ_2，φ_3 为广义坐标，则有两个约束方程

$$\left.\begin{aligned} a_1\cos\varphi_1+a_2\cos\varphi_2+a_3\cos\varphi_3=d \\ a_1\sin\varphi_1+a_2\sin\varphi_2-a_3\sin\varphi_3=0 \end{aligned}\right\} \tag{1-27}$$

最后，如选 φ_1 为坐标，则 φ_2,φ_3 可借助约束方程(1-27)表示出来。但是，最后表示出 $x_1=x_1(\varphi_1)$，$y_1=y_1(\varphi_1)$，$x_2=x_2(\varphi_1)$，$y_2=y_2(\varphi_1)$将是非常麻烦的。

此例中仅用一个参数 φ_1 便可确定系统的位置，但为方便起见，宁可选三个参数 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 而带两个约束方程(1-27)。我们称 φ_2，φ_3为"多余坐标"。

2. 广义速度

广义坐标对时间 t 的导数 $\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$，…，$\dot{q}_n$ 称为广义速度。系统质点的速度矢量 $\boldsymbol{v}_i$ 用广义速度表示为

$$\boldsymbol{v}_i=\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t} \tag{1-28}$$

或者写成直角坐标形式

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_i&=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial x_i}{\partial t} \\ \dot{y}_i&=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial y_i}{\partial t} \\ \dot{z}_i&=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial z_i}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{1-29}$$

在稳定约束下，$\boldsymbol{r}_i$ 取形(1-22)，因此，速度矢量 $\boldsymbol{v}_i$ 是广义速度的线性齐次形

$$\boldsymbol{v}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s \tag{1-30}$$

或写成直角坐标形式

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_s}\dot{q}_s \\ \dot{y}_i &= \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial q_s}\dot{q}_s \\ \dot{z}_i &= \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial q_s}\dot{q}_s \end{aligned}\right\} \tag{1-31}$$

例如，在本节例 1 中直角坐标的速度分量用广义速度$\dot{r}$，$\dot{\psi}$，$\dot{z}$ 表示为

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos\psi - r\dot{\psi}\sin\psi \\ \dot{y} &= \dot{r}\sin\psi + r\dot{\psi}\cos\psi \\ \dot{z} &= \dot{z} \end{aligned}\right\} \tag{1-32}$$

3. 广义加速度

广义坐标对时间的两次导数 $\ddot{q}_1$，$\ddot{q}_2$，…，$\ddot{q}_n$ 称为广义加速度。系统中点的加速度矢量 $\boldsymbol{a}_i$ 可由(1-21)对时间 t 求两次导数或由(1-28)对时间 t 求一次导数而得

$$\boldsymbol{a}_i=\dot{\boldsymbol{v}}_i=\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\ddot{q}_s+\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_i}{\partial q_k\partial q_s}\dot{q}_k\dot{q}_s$$
$$+2\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s\partial t}\dot{q}_s+\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_i}{\partial t^2} \tag{1-33}$$

或写成直角坐标形式

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_i = &\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\ddot{q}_s+\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k\partial q_s}\dot{q}_k\dot{q}_s \\ &+2\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_s\partial t}\dot{q}_s+\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \\ \ddot{y}_i = &\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}\ddot{q}_s+\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 y_i}{\partial q_k\partial q_s}\dot{q}_k\dot{q}_s \\ &+2\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 y_i}{\partial q_s\partial t}\dot{q}_s+\frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} \end{aligned}\right\} \tag{1-34}$$

$$\left.\begin{aligned}\ddot{z}_i=&\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\ddot{q}_s+\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 z_i}{\partial q_k\partial q_s}\dot{q}_k\dot{q}_s\\&+2\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 z_i}{\partial q_s\partial t}\dot{q}_s+\frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2}\end{aligned}\right\}$$

如果约束是稳定的，则在(1-33)、(1-34)中对 t 的偏导数项消失。

例如，在本节例 1 中直角坐标的加速度分量用广义加速度 $\ddot{r}$，$\ddot{\psi}$，$\ddot{z}$ 表示为

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}&=\ddot{r}\cos\psi-r\ddot{\psi}\sin\psi-2\dot{r}\dot{\psi}\sin\psi-r\dot{\psi}^2\cos\psi\\\ddot{y}&=\ddot{r}\sin\psi+r\ddot{\psi}\cos\psi+2\dot{r}\dot{\psi}\cos\psi-r\dot{\psi}^2\sin\psi\\\ddot{z}&=\ddot{z}\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}35)$$

4. 约束方程的广义坐标、广义速度的表达式

我们用广义坐标、广义速度来表示完整约束(1-8)、非完整约束(1-10)及线性非完整约束(1-11)。

如果取 q_1，q_2，…，q_n 为系统的广义坐标，则完整约束(1-8)都自然满足。如果系统还有 m 个多余坐标 q_{n+1}，…，q_{n+m}，则完整约束表为

$$f_\gamma(q_1,q_2,\cdots,q_n,q_{n+1},\cdots,q_{n+m},t)=0\qquad(1\text{-}36)$$
$$(\gamma=1,2,\cdots,m)$$

非完整约束(1-10)成为

$$\varphi_\beta(q_1,q_2,\cdots,q_n,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_n,t)=0\qquad(1\text{-}37)$$
$$(\beta=1,2,\cdots,g)$$

其中 φ_β 为(1-10)中直角坐标、速度用广义坐标、广义速度表达而得的结果。

线性非完整约束(1-11)成为

$$\sum_{s=1}^{n}A_{\beta s}\dot{q}_s+A_\beta=0\quad(\beta=1,2,\cdots,g)\qquad(1\text{-}38)$$

我们将(1-29)代入(1-11)可得(1-38)中的系数表达式

$$\left.\begin{aligned} A_{\beta s} &= \sum_{i=1}^{N}\left(a_{\beta i}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+b_{\beta i}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+c_{\beta i}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)\\ A_{\beta} &= d_{\beta}+\sum_{i=1}^{N}\left(a_{\beta i}\frac{\partial x_i}{\partial t}+b_{\beta i}\frac{\partial y_i}{\partial t}+c_{\beta i}\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)\\ &(\beta=1,2,\cdots,g;\quad s=1,2,\cdots,n) \end{aligned}\right\} \tag{1-39}$$

注意到，如果满足条件

$$\frac{\partial A_{\beta s}}{\partial q_k}=\frac{\partial A_{\beta k}}{\partial q_s},\quad \frac{\partial A_{\beta s}}{\partial t}=\frac{\partial A_{\beta}}{\partial q_s} \tag{1-40}$$

$$(\beta=1,2,\cdots,g;\quad s,k=1,2,\cdots,n)$$

那么，约束(1-38)是可积分的。实际上，如果取

$$A_{\beta s}=\frac{\partial f_{\beta}}{\partial q_s},\qquad A_{\beta}=\frac{\partial f_{\beta}}{\partial t}$$

其中 f_β 是所有 q_s 及 t 的函数，则(1-40)得以满足。此时(1-38)变为 $df_\beta=0$，积分得

$$f_{\beta}(q_1,q_2,\cdots,q_n,t)=c_{\beta}$$

其中 c_β 为积分常数。因此，约束(1-38)是可积分的。

必须注意，条件(1-40)是可积的充分条件，而不是必要条件。

第三节　虚位移、自由度

1. 虚位移的定义

在分析力学中广泛应用虚位移的概念。

质点受有约束而运动时，在每一时刻占有一定的位置，它的运动应该满足当时在该位置的约束条件。设在瞬时 t，质点的位置在M，假如没有约束，则此点在此时可向任何方

向自由移动。假如有约束，例如限制它在一曲面上，则点在M位置只能在曲面上沿一条过M点的曲线而运动，点的速度矢量应与曲面相切，它的位移应当在一条切线上。在切线上而又不离开曲面的位移应是无限小位移。于是，把在一定位置上、为约束所允许的假想的无限小位移称为虚位移。

关于虚位移的定义，要注意以下几点：

（1）虚位移是假定约束不改变而设想的位移。如果约束是不稳定的，例如质点在曲面上运动，而曲面本身也在变化或运动，则质点在空间M位置的瞬时，曲面虽有一定的速度，但虚位移是在这个瞬时的曲面的切平面上。例如，点受有约束 $x^2+y^2+z^2=25t^2$，对瞬时 $t=1$ 秒的虚位移应在半径为 5 的球面的切平面上；而当 $t=2$ 秒时的虚位移在半径为 10 的球面的切平面上。因此，对虚位移来说，时间 t 是固定的、不变的。这就是“在一定位置上”的含义；

（2）虚位移不是任何随便的位移，它必须为约束所允许；

（3）虚位移是一个假想的位移，它与实位移不同。实位移是指质点在真实运动中在一定的主动力作用下经历一定时间的位移。而虚位移则是由几何学或运动学考虑而虚设的位移。实位移只有一个，虚位移可有无穷多个。

在完整稳定约束下，实位移是虚位移中的一个；在完整不稳定约束下，实位移不是虚位移中的一个。因为在完整稳定约束下，约束不随时间变化，实位移也必须在曲面的切平面上。但是在完整不稳定约束下情况就不同了。例如，图 1-6 的质点沿运动的斜面下滑，经历无限小时间间隔，实位移是$\overline{M_0M_1}$，而虚位移只能在 M_0P_0 平面上。这可由运动合

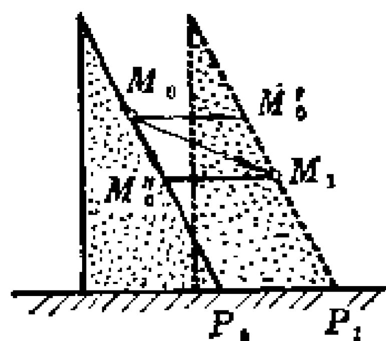


图 1-6

成的观点来解释。质点的真实位移 $d\boldsymbol{r}=\overline{M_0M_1}$，由约束面运动产生的牵连位移 $d\boldsymbol{r}_1=\overline{M_0M_0'}$ 和相对于约束面的虚位移 $\delta\boldsymbol{r}=\overline{M_0M_0''}$ 而合成，即

$$d\boldsymbol{r}=\delta\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r}_1$$

对于不稳定约束 $d\boldsymbol{r}_1\neq 0$，故实位移 $d\boldsymbol{r}$ 不与任何一个虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$ 相重合；

(4) 还需注意，虚位移是无限小位移。因此，在实际应用时，虚位移可选在虚速度的方向。

如果点的矢径为 $\boldsymbol{r}_i$，则虚位移记作 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 或 δx_i，δy_i，δz_i，而实位移记作 $d\boldsymbol{r}_i$ 或 dx_i，dy_i，dz_i。

2. 约束加在虚位移上的条件

(1) 完整约束加在虚位移上的条件

设力学系统由 N 个质点组成，并受有形如

$$F_\alpha(x_i,y_i,z_i,t)=0 \tag{1-41}$$

$$(i=1,2,\cdots,N \quad \alpha=1,2,\cdots,l)$$

的 l 个完整约束。在瞬时 t，系统中的点由 (x_i,y_i,z_i) 发生虚位移 δx_i，δy_i，δz_i 而到达点 $(x_i+\delta x_i, y_i+\delta y_i, z_i+\delta z_i)$，按照虚位移的定义，质点的新位置必须仍在约束曲面上，即

$$F_\alpha(x_i+\delta x_i,y_i+\delta y_i,z_i+\delta z_i,t)=0 \tag{1-42}$$

$$(i=1,2,\cdots,N \quad \alpha=1,2,\cdots,l)$$

将函数(1-42)展开为泰勒(Taylor)级数：

$$F_\alpha(x_i+\delta x_i,\ y_i+\delta y_i,\ z_i+\delta z_i,\ t)$$

$$=F_\alpha(x_i,y_i,z_i,t)+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial F_\alpha}{\delta z_i}\delta z_i\right)$$

$+$高阶小项$=0$

因为虚位移 $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ 是一阶微量，故可略去高阶小项，并利用(1-41)，得

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0$$

$$(\alpha=1,2,\cdots,l) \tag{1-43}$$

这就是约束(1-41)加在虚位移 $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ 上的 l 个条件。

由于 $3N$ 个虚位移 δx_i，δy_i，δz_i 用 l 个关系(1-43)相联系，因此 δx_i、δy_i、δz_i 不全是独立的。但可以选其中的 $3N-l$ 个是独立的，而其余 l 个借助(1-43)用独立的虚位移表出。

注意到，方程(1-43)的数目是 $l<3N$，故相对 $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ 有无穷多个解，从而又一次说明虚位移可有无穷多个。

我们再求实位移应满足的关系。设坐标有增量 dx_i, dy_i, dz_i，时间有增量 dt，类似于得到(1-43)所采用的手续，有

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial y_i}dy_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial z_i}dz_i\right)+\frac{\partial F_\alpha}{\partial t}dt=0$$

$$(\alpha=1,2,\cdots,l) \tag{1-44}$$

当约束是稳定的情形，有 $\frac{\partial F_\alpha}{\partial t}=0$，此时(1-44)成为

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial y_i}dy_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial z_i}dz_i\right)=0 \tag{1-45}$$

$$(\alpha=1,2,\cdots,l)$$

比较(1-43)与(1-45)，又一次证明，在完整稳定约束下实位移是虚位移中的一个。

对于完整约束系统，可以选 $n=3N-l$ 个广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 作为独立的坐标，它们的变分 δq_1，δq_2，$\cdots$，δq_n

作为独立的变分。这时，由(1-20)，虚位移可用广义坐标的变分表出

$$\left.\begin{aligned}\delta x_i&=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\delta q_s\\\delta y_i&=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}\delta q_s\\\delta z_i&=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\delta q_s\end{aligned}\right\}\tag{1-46}$$

因此，对于完整力学系统，独立坐标的数目等于坐标的独立变分数目。

(2) 线性非完整约束加在虚位移上的条件

现在设力学系统除受有 l 个形如(1-41)的完整约束外，还受有 g 个形如(1-11)的非完整约束，即

$$\sum_{i=1}^{N}(a_{\beta i}\dot{x}_i+b_{\beta i}\dot{y}_i+c_{\beta i}\dot{z}_i)+d_\beta=0\tag{1-47}$$
$$(\beta=1,2,\cdots,g)$$

将(1-47)写成微分形式，有

$$\sum_{i=1}^{N}(a_{\beta i}dx_i+b_{\beta i}dy_i+c_{\beta i}dz_i)+d_\beta dt=0\tag{1-48}$$
$$(\beta=1,2,\cdots,g)$$

因为虚位移是力学系统位置在这一时刻相应的变化，时间不变，因此在(1-48)中以符号 δ 代替 d，并取 $\delta t=0$，便得

$$\sum_{i=1}^{N}(a_{\beta i}\delta x_i+b_{\beta i}\delta y_i+c_{\beta i}\delta z_i)=0\tag{1-49}$$
$$(\beta=1,2,\cdots,g)$$

这就是线性非完整约束加在虚位移上的条件。比较(1-48)与(1-49)，我们发现，对 $d_\beta=0$ 的情形，即约束方程对速度是

齐次的情形，实位移是虚位移中的一个。因此，对线性非完整约束来说，实位移是否处于虚位移之中，并不在于约束是否稳定，而在于约束方程相对于速度项是否齐次。关于这一点，蒲赫哥尔茨(Н. Н. Бухгольц)书中的叙述是错误的*。现将(1-46)代入(1-49)，便得

$$\sum_{s=1}^{n} A_{\beta s}\delta q_s=0 \qquad (1\text{-}50)$$

其中 $A_{\beta s}$ 由(1-39)确定。

因此，对于具有 l 个完整约束、g 个非完整约束的系统，独立坐标的数目仍是 $n=3N-l$，但因有条件(1-50)，坐标的独立变分的数目成为 $n-g$。

3. 自由度

有了虚位移的概念就能建立对于研究运动十分有用的系统自由度数目的概念。它在某种程度上表征所加约束对系统运动的限制。广义坐标的虚位移也叫坐标的变分。我们把系统广义坐标的独立变分数目叫系统自由度数目。

如前所述，对完整系统，独立坐标的数目与坐标的独立变分数目相同，因此完整系统的自由度数目等于独立坐标的数目。但对非完整系统，独立变分的数目不等于独立坐标的数目，而等于独立坐标的数目减去非完整约束方程的数目。因此非完整系统的自由度数目等于独立坐标数目减去非完整约束方程的数目。

例1. 一质点沿一曲面 $f(x,y,z)=0$ 运动。

解： 因 $f(x,y,z)=0$ 是一个完整约束，虚位移 δx, δy, δz 应满足关系

* 参考文献(10)

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\delta f}{\partial z}\delta z=0$$

质点的独立坐标数目是 2，独立变分数目也是 2。

例2. 平面上两质点由一长度为 l 的刚性杆联结，运动中杆的中点速度只可以沿着杆向（图 1-1）。

解： 我们取杆的中点坐标(x,y)及杆与 x 轴夹角 θ 为广义坐标，则两质点的坐标用 x、y、θ 表为

$$x_1=x+\frac{l}{2}\cos\theta,\qquad y_1=y+\frac{l}{2}\sin\theta$$

$$x_2=x-\frac{l}{2}\cos\theta,\qquad y_2=y-\frac{l}{2}\sin\theta$$

于是完整约束(1-6)自动满足，而非完整约束(1-7)成为

$$\dot{y}=\dot{x}\,\mathrm{tg}\theta$$

因此，虚位移满足关系

$$\delta y=\delta x\,\mathrm{tg}\theta$$

系统的独立坐标数目是 3，独立变分数目是 2，系统的自由度是 2。

例3. 一质点在平面上运动，所受约束为 $\dot{y}=t\dot{x}$。试证明，实位移处于虚位移之中，并求此系统的自由度数目。

解： 由约束方程知实位移满足方程 $dy=t\,dx$，而虚位移满足关系 $\delta y=t\delta x$。因此，虽然约束是不稳定的，但实位移仍处于无数个虚位移之中。

系统的独立坐标数目是 2，独立变分数目是 1，系统的自由度是 1。

例4. 一只机械手 $ABCDEF$ 由四个刚体组成（图 1-7）：A 是球形铰链，B，C，D是三个平面铰链。求这个系统

的自由度数目。

解：这是一个完整系统，它的自由度数目等于独立坐标的数目。每一个刚体有 6 个自由度。每一个球形铰链使自由度数目减少 3 个，每一个平面铰链使自由度数目减少 5 个，所以整个系统的自由度数目是

$$(6\times4)-3-(5\times3)=6$$

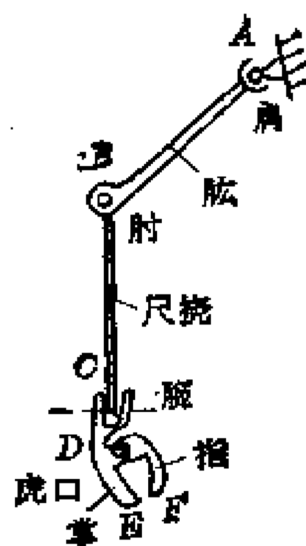


图 1-7

机械手的位置由 6 个广义坐标确定。例如，6 个广义坐标可这样选取：刚体 AB (肱)相对固定空间的 3 个欧拉角，BC (尺挠)相对 AB 的一个转角，CE(掌)相对 BC 的一个转角，还有 DF(指)相对 CE 的一个转角。

第四节　约束反力、理想约束

1. 约束反力、理想约束

假如没有约束，则系统坐标的值由时间、主动力和运动初始条件确定。当存在约束时，系统坐标的值不仅与时间、主动力和运动初始条件有关，而且还与约束有关。也就是说系统坐标的值须要符合约束条件，其运动按照约束方程的规定而运动，就不能象原来未受约束时那样地运动。引起运动情况改变的，是约束对系统的作用，我们把这种作用称为约束反力或简称约束力。

系统中各质点所受约束力对该点的虚位移各有一虚功。

如果系统中各点的约束力的虚功之和等于零，则这种约束称为理想约束。

如果以 $\boldsymbol{R}_i$ 表示第 i 个质点所受约束力之合力，$\delta\boldsymbol{r}_i$ 是它的虚位移，则理想约束条件表为

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{1-51}$$

对于轴向单位矢量为 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 的空间固定直角坐标系，可将约束力与虚位移表为

$$\boldsymbol{R}_i=R_{ix}\boldsymbol{i}+R_{iy}\boldsymbol{j}+R_{iz}\boldsymbol{k}$$

$$\delta\boldsymbol{r}_i=\delta x_i\boldsymbol{i}+\delta y_i\boldsymbol{j}+\delta z_i\boldsymbol{k}$$

此时(1-51)可表为

$$\sum_{i=1}^{N}(R_{ix}\delta x_i+R_{iy}\delta y_i+R_{iz}\delta z_i)=0 \tag{1-52}$$

对(1-21)两端取变分，则有

$$\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\delta q_s \tag{1-53}$$

将(1-53)代入(1-51)，则有

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\cdot\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\delta q_s=0$$

交换求和顺序，有

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\right)\delta q_s=0$$

或写成

$$\sum_{s=1}^{n}Q_s'\delta q_s=0 \tag{1-54}$$

其中

$$Q_s'=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \tag{1-55}$$

称为广义约束反力。

于是我们有(1-51)、(1-52)及(1-54)所分别表示的理想约束条件。

2. 理想约束的例子

(可参看哈工大编《理论力学》下册(第四版)p240—p242)。

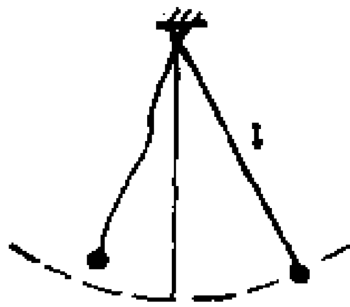
3. 理想约束假定的重要性和可能性

由达朗伯、拉格朗日创立的非自由质点系动力学是基于理想约束假定的。根据这个假定所建立的虚位移原理(第二章)以及动力学普遍方程(第三章),消除了约束反力,从而使问题变得简单了。由此可见理想约束假定的重要性。同时理想约束的假定也是完全可能的。首先,为描述自然现象和大多数技术过程,这样的假定有足够的精确度。例如,复杂的机构可看作刚体系统,其中刚体两两之间或刚性联结或以铰链联结或以其表面相接触。如果认为所有刚性联结是绝对刚性的,铰链是理想的,而所有接触面是理想光滑的或完全粗糙的,则任一复杂机构均可看作具有理想约束的质点系统。其次,如果约束不是理想的,例如摩擦力作虚功,则可将摩擦力作为主动力来考虑。由于未知量摩擦力的出现而短少的方程可用摩擦定律来补充。

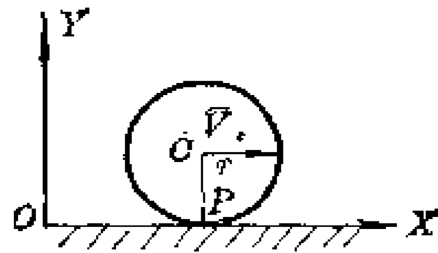
今后我们将假定加在力学系统上的所有约束都是理想的。

第一章 习 题

1-1 一柔软不可伸长的线,一端固定,另一端挂一小球。小球所受约束是单面的还是双面的?试写出约束方程。



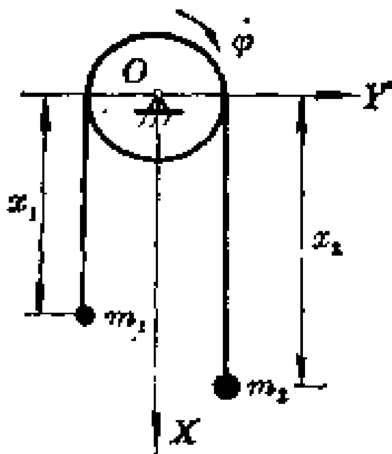
题 1-1 图



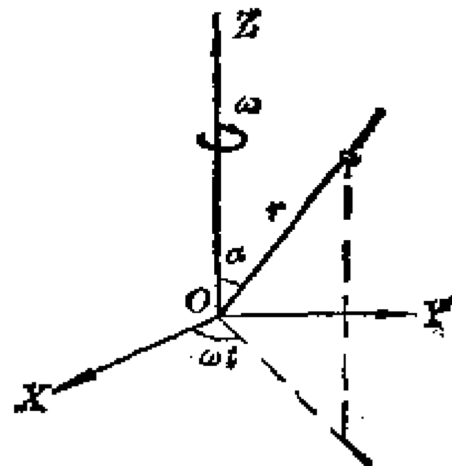
题 1-2 图

1-2　一半径为 r 的圆盘在铅垂平面内沿 X 轴作纯滚动。这约束是完整的还是非完整的？试写出约束方程。

1-3　质量为 m_1、m_2 的两物体用长为 l 的不可伸长的轻绳联结，绳子跨过半径为 r 的定滑轮。假设绳子与滑轮之间无滑动。取 φ, x_1, x_2 为坐标。试写出系统在铅垂面内运动时的约束方程。



题 1-3 图

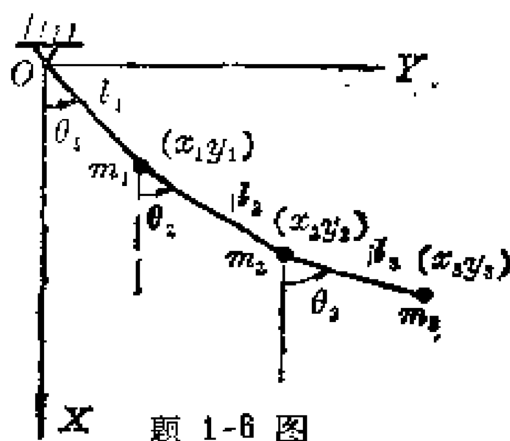


题 1-4 图

1-4　一直杆以常角速度 ω 绕铅垂轴转动，杆与铅垂线夹角 α 为常值。杆上有一小环，小环可沿杆滑动。取小环相对杆与铅垂线交点 O 的距离 r 为坐标。试将环的直角坐标用 r 及 ωt 表示之。写出直角坐标表示的约束方程。

1-5　用球坐标 r, φ, θ（图 1-3b）及其导数表示自由质点的速度 $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ 及加速度 $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$。

1-6　一系统由三个质点组成，用不计质量的分别长 l_1、l_2、l_3 的细杆顺次联结。试用 θ_1, θ_2, θ_3 及其导数表示 $\dot{x}_1$、$\dot{y}_1$; $\dot{x}_2$、$\dot{y}_2$; $\dot{x}_3$、$\dot{y}_3$。

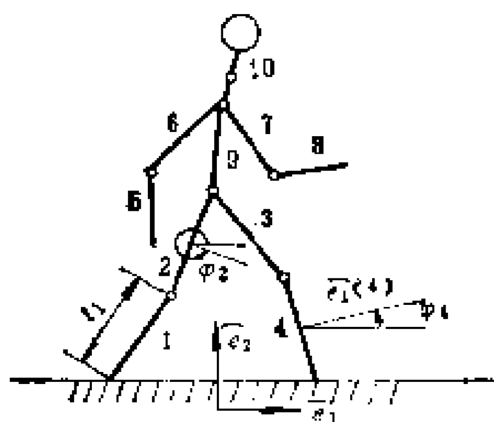


题 1-6 图

1-7　试说明题 1-3 及题 1-4 各有多少个独立的坐标，各有多少个自由度？

1-8　一刚体有一个固定点，有两个固定点，有三个固定点（不共线）时，各有几个自由度？

1-9　空间两刚体间有一点铰结，这系统有几个自由度？



题 1-10 图

1-10　一人体模型由十个刚体组成：头，身，四肢（上、下臂，大、小腿）。设各个部位在铅垂平面内运动，且两脚停在地上，前后脚距离保持为常值 L。设各部位长 l_i，今用水平固定方向单位矢量 e_1 与第 i 个刚体法线方向 $e_1^{(i)}$ 的夹角 $\varphi_i(i=1,2,\cdots,10)$确定系统的位置。试写出约束方程并说明系统有几个自由度（这是一个典型的一般链式系统的例子）。

1-11　试判断约束

$$-y\dot{x}+x\dot{y}+(x^2+y^2)\dot{z}=0$$

是完整的，还是非完整的？

1-12　试用(1-40)式判断约束

$$(2x+y+z)\dot{x}+(2y+z+x)\dot{y}+(2z+x+y)\dot{z}=0$$

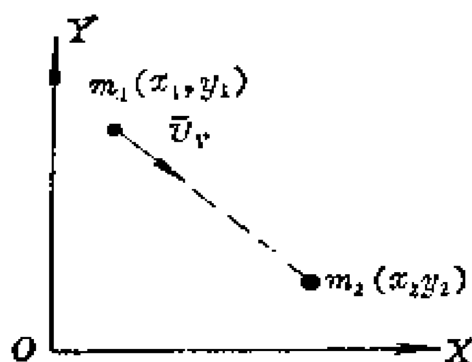
是半完整的。

1-13　验证约束

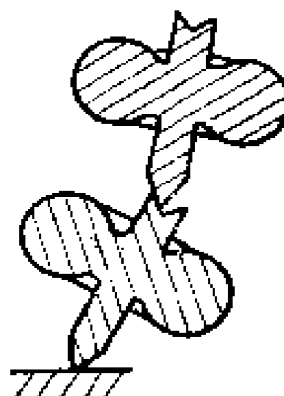
$$\dot{x}(x^2+y^2+z^2)+2(x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z})=0$$

不满足(1-40)，但它是可积的。

1-14　平面上有两质点m_1和m_2，系统运动时m_1对m_2进行追踪——m_1的速度始终对准m_2，试写出约束方程。



题 1-14 图



题 1-15 图

1-15　系统由两个叠放在一起的陀螺组成，下面的陀螺支点固定，求其自由度。

第二章　虚位移原理与分析静力学

虚位移原理是分析力学的基本原理之一，它与达朗伯原理联合可得到动力学普遍方程。虚位移原理是静力学的最普遍的原理，它广泛应用于解静力学问题。因此，虚位移原理具有理论价值与实际意义。

第一节　虚位移原理

1. 虚位移原理及其证明

虚位移原理，亦称虚功原理，表述如下：在双面、理想、完整、稳定约束下，力学系统平衡的必要和充分条件是：作用在系统上的主动力在任何虚位移中所作元功之和等于零。

原理中的"平衡"是指：如果系统原来是静止的（相对于惯性参考系），在主动力系作用下仍然保持静止。

我们来证明虚位移原理。

〔必要性的证明〕

这就是要证明，在双面、理想、完整、稳定约束下，如果力学系统处于平衡，则作用在系统上的主动力在任何虚位移中所作元功之和等于零。为此，我们在由N个质点组成的力学系统中任取一点M_i，此点所受主动力的合力为$\boldsymbol{F}_i$，所受约束力的合力为$\boldsymbol{R}_i$。因系统处于平衡，故有

$$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i=0$$

今给点 M_i 以虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_i$，则作用于 M_i 上的所有力的虚功

$$\delta A_i=(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

对整个系统来说，所有力的虚功

$$\delta A=\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

由于约束是双面、理想的，因此有

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{2-1}$$

于是有

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

原理的必要性得证。

[充分性的证明]

现在我们来证明，如果主动力的虚功之和为零，则对于双面、理想、完整、稳定的力学系统来说必然处于平衡。假设主动力的虚功之和为零，则有

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{2-2}$$

利用反证法（或称归谬法）来证明原理的充分性。假定质点系不平衡，而有

$$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i\neq 0 \quad (i=1,2,\cdots,N)$$

原来静止的质点系，经时间间隔 dt 之后，任取一质点 M_i，将在 $\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i$ 的方向上产生一实位移 $d\boldsymbol{r}_i$，因此

$$(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i)\cdot d\boldsymbol{r}_i>0$$

或

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i)\cdot d\boldsymbol{r}_i>0$$

根据假设约束是完整、稳定的，故实位移属于虚位移之列，因此存在某一$\delta \boldsymbol{r}_i$，它等于$d\boldsymbol{r}_i$，因此

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i > 0$$

又因约束是双面、理想的，故

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

于是有

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i > 0$$

此式与假设(2-2)相矛盾。原理的充分性得证。

我们注意到，在上述必要性证明中只用到双面、理想约束条件，而在充分性证明中又用到“实位移属于虚位移之列”这一条件。因此，虚位移原理还可以有更一般的叙述：在双面、理想约束下，如果实位移属于虚位移之列，则力学系统平衡的充要条件是主动力在任何虚位移中所作的虚功之和等于零。

2. 虚位移原理的各种形式

(1) 虚位移原理的矢量形式

虚位移原理的矢量形式为

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{2-3}$$

(2) 虚位移原理的直角坐标形式

我们取空间固定直角坐标系$OXYZ$，其轴向单位矢量为$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，将主动力$\boldsymbol{F}_i$及虚位移$\delta \boldsymbol{r}_i$表为直角坐标形式，即

$$\boldsymbol{F}_i = F_{ix}\boldsymbol{i} + F_{iy}\boldsymbol{j} + F_{iz}\boldsymbol{k}$$

$$\delta \boldsymbol{r}_i=\delta x_i \boldsymbol{i}+\delta y_i \boldsymbol{j}+\delta z_i \boldsymbol{k}$$

于是(2-3)成为

$$\sum_{i=1}^{N}(F_{ix}\delta x_i+F_{iy}\delta y_i+F_{iz}\delta z_i)=0 \qquad (2\text{-}4)$$

(3) 虚位移原理的广义坐标形式

假设系统由N个质点组成，受有l个双面、理想、稳定的、完整的约束，则可取$n=3N-l$个独立的广义坐标q_1，$q_2,\cdots,q_n$来表示x_i，y_i，z_i，即

$$\left.\begin{aligned}x_i&=x_i(q_1,q_2,\cdots,q_n)\\ y_i&=y_i(q_1,q_2,\cdots,q_n)\\ z_i&=z_i(q_1,q_2,\cdots,q_n)\end{aligned}\right\}(i=1,2,\cdots,N) \qquad (2\text{-}5)$$

虚位移δx_i，δy_i，δz_i可用广义坐标的变分δq_1，$\delta q_2,\cdots,\delta q_n$表示。实际上，对(2-5)两端取变分，即得

$$\left.\begin{aligned}\delta x_i&=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\delta q_s\\ \delta y_i&=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}\delta q_s\\ \delta z_i&=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\delta q_s\end{aligned}\right\}(i=1,2,\cdots,N) \qquad (2\text{-}6)$$

将(2-6)代入虚位移原理的直角坐标形式(2-4)中，便得

$$\sum_{i=1}^{N}\left(F_{ix}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\delta q_s+F_{iy}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}\delta q_s+F_{iz}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\delta q_s\right)=0$$

交换求和顺序，得

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{N}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)\right\}\delta q_s=0 \qquad (2\text{-}7)$$

令

$$Q_s = \sum_{i=1}^{N}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right) \tag{2-8}$$

则(2-7)表为

$$\sum_{s=1}^{n} Q_s \delta q_s = 0 \tag{2-9}$$

这就是虚位移原理的广义坐标形式，其中Q_s称为与q_s相应的广义力。广义力的量纲可能是力、力矩等：如果δq_s为位移，则Q_s为力；如果δq_s为角度，则Q_s为力矩。

虚位移原理是静力学的普遍原理，构成分析静力学的基础。

3. 虚位移原理的意义

(1) 虚位移原理是静力学的最普遍的原理，由它可以推导出全部静力学。虚位移原理的形式(2-3)、(2-4)、(2-9)构成分析静力学的全部内容。

(2) 虚位移原理是从功的观点来研究力学系统的平衡的，而几何静力学（理论力学中的静力学）是从力的观点来研究平衡的。虚位移原理在处理系统平衡时不是孤立地静止地研究平衡这一特定状态，而是改变这一状态(给出虚位移)，从变革比较中认识平衡的规律。这一观点在认识事物本质时是十分重要的。

(3) 当系统有较多约束时，利用分析静力学的方法解静力学问题要比几何静力学来得简单。

(4) 虚位移原理与达朗伯原理联合而构成动力学普遍方程，因此虚位移原理是分析力学的一个基本原理。

第二节　虚位移原理的应用

1．用虚位移原理解静力学问题

虚位移原理是解决静力学问题的普遍方法，特别是解决多约束系统的静力学问题显得非常简捷。这个原理有两个突出的特点：

（1）在解静力学问题中，只要断定系统是受理想约束的，约束力的功自然消去了，因而可以避免方程中繁杂的约束力出现。另外，虚位移原理也能应用于求约束力，只须在对应点解除约束，代之以约束力，并把它看作主动力来处理就行了。

（2）由于引入了广义坐标，解决多约束系统的问题时，可以根据情况选择变数，而原理形式不变，这就给具体问题的解决，特别是在许多约束的限制下自由度数目较少的情形，带来极大的方便。

应用虚位移原理解决静力学问题的步骤大致是：

① 根据问题要求，确定所研究系统的范围，并检查系统的约束情况，约束力在虚位移上是否作功，当约束力不作功时才能应用虚位移原理。

② 确定自由度数目 n，选择广义坐标。为描述系统的便利，可以适当地选取 $n+m$ 个参数（即具有 m 个多余坐标）并给出 m 个约束方程。

③ 列写虚功方程 $\sum\limits_{s=1}^{n} Q_s \cdot \delta q_s = 0$

④ 因 δq_s 彼此独立，故有平衡方程

$$Q_s = 0 \qquad (s=1,2,\cdots,n)$$

例1. 螺旋起重机如图 2-1 所示，试求在手柄上须加多大的力 P 才能举起重物 Q。已知螺纹的升距为 h，手柄长 l。

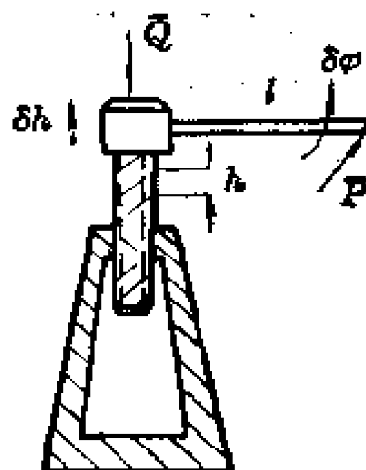


图 2-1

解： 当重物上升十分缓慢或均匀上升时，可看成是一个平衡问题。

我们选研究对象为整个系统。假定螺旋中摩擦可以忽略，则约束是理想的，可应用虚位移原理。系统有一个自由度。用 δh 表示平台移动的虚位移，用 $\delta\varphi$ 表示手柄转动的虚位移。由几何关系得知，当手柄转动 $\delta\varphi$ 时，平台移动距离为

$$\delta h = \frac{h}{2\pi}\delta\varphi \tag{2-10}$$

系统平衡时的虚功方程为

$$Pl\delta\varphi - Q\delta h = 0 \tag{2-11}$$

将(2-11)代入(2-10)，便得

$$\left(Pl - Q\frac{h}{2\pi}\right)\delta\varphi = 0 \tag{2-12}$$

根据 $\delta\varphi$ 的任意性，即得

$$Pl - Q\frac{h}{2\pi} = 0$$

因此

$$P=\frac{h}{2\pi l}Q \tag{2-13}$$

从结果中易见，当 l 增大或 h 减小时都能省力。

由这一例子可看出，虚位移原理的一个很大的优点就是应用虚功方程立刻可导出平衡时发动力和有用阻力之间的关系，在计算中不出现约束反力。

例2. 在公共汽车上用来开启车门的机构，**其装置**如图 2-2 所示，求垂直于手柄 OA 的力 P 和门的阻力矩 M 之间的关系。

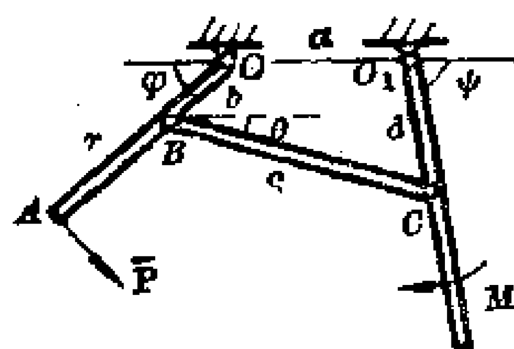


图 2-2

解： 设门的启动不很急剧，可认为此连杆机构在发动力 P 及阻力矩 M 的作用下平衡。假如各铰链光滑，便可用虚位移原理处理。此连杆机构有一个自由度，假定 φ 取定，由简单几何关系看出四边形 $OBCO_1$ 被完全确定。但为方便起见，可取 φ，ψ，θ 三个参数来描述系统的位置。由虚位移原理知

$$P r\delta\varphi+M\delta\psi=0 \tag{2-14}$$

为建立 $\delta\varphi$，$\delta\psi$ 之间的关系，写出系统的约束方程。考察 OB、BC、CO_1 各杆在水平与铅垂方向的投影，显然有

$$\left.\begin{aligned}b\cos\varphi+a+d\cos\psi=c\cos\theta\\ b\sin\varphi+c\sin\theta=d\sin\psi\end{aligned}\right\} \tag{2-15}$$

对(2-15)取变分，得

$$b\sin\varphi\delta\varphi+d\sin\psi\delta\psi=c\sin\theta\delta\theta$$

$$b\cos\varphi\delta\varphi+c\cos\theta\delta\theta=d\cos\psi\delta\psi$$

由这两式消去 $\delta\theta$，得

$$\delta\psi=-\frac{b\sin(\varphi+\theta)}{d\sin(\psi-\theta)}\delta\varphi \qquad (2\text{-}16)$$

将(2-16)代入(2-14)，据 $\delta\varphi$ 的任意性，便得

$$M=\frac{Prd\sin(\psi-\theta)}{b\sin(\varphi+\theta)} \qquad (2\text{-}17)$$

其中 φ，ψ，θ 可根据约束方程(2-15)，用任何一个表出其它两个。从结果中看出，减小 b 或增大 r，d，便可用较小的力克服较大的阻力矩。

为建立 $\delta\varphi$，$\delta\psi$ 之间的关系，还有一种常用的方法。我们由运动学知道，刚体上任何两点的速度在其联线方向的投影相等。据此，考察杆 BC 两端的虚位移，有

$$b\delta\varphi\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi-\theta\right)=-d\delta\psi\cos\left(\frac{\pi}{2}-\psi+\theta\right)$$

即

$$\delta\psi=-\frac{b\sin(\varphi+\theta)}{d\sin(\psi-\theta)}\delta\varphi$$

如果用几何静力学方法解此题，必须分别选三个杆为研究对象，至少需列写三个平衡方程。读者可试一试。

例3. 如图 2-3 所示的劈，求平衡时 P，P_1，P_2 间的关系。

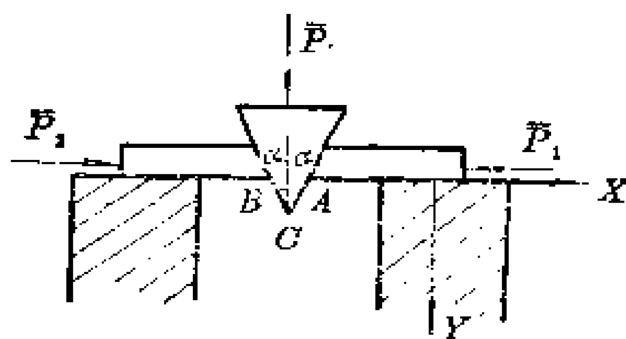


图 2-3

解： 将三个物体取为系统，假定各接触面都是光滑的，满足理想约束条件。系统有两个自由度。取直角坐标系 XOY，劈尖 C 点坐标 (X, Y) 为广义坐标，A 点

有坐标$(x_1, 0)$，B点有坐标$(x_2, 0)$。列写虚功方程

$$P\delta y - P_1\delta x_1 + P_2\delta x_2 = 0 \tag{2-18}$$

根据几何关系，列写约束方程

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + y\text{tg}\alpha \\ x_2 &= x - y\text{tg}\alpha \end{aligned}\right\} \tag{2-19}$$

于是

$$\left.\begin{aligned} \delta x_1 &= \delta x + \delta y\text{tg}\alpha \\ \delta x_2 &= \delta x - \delta y\text{tg}\alpha \end{aligned}\right\} \tag{2-20}$$

将(2-20)代入(2-18)，整理后得

$$(P - P_1\text{tg}\alpha - P_2\text{tg}\alpha)\delta y + (-P_1 + P_2)\delta x = 0$$

因δx，δy是任意的，故得平衡条件

$$P - P_1\text{tg}\alpha - P_2\text{tg}\alpha = 0$$

$$-P_1 + P_2 = 0$$

由此解得

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= P_2 \\ P &= 2P_1\text{tg}\alpha \end{aligned}\right\} \tag{2-21}$$

以上解法是取一般的虚位移δx，δy，这种做法中虚位移间的关系比较复杂。若取特殊的虚位移来解可能方便些，并且自由度越多这样做就越方便。

取$\delta x \neq 0$，$\delta y = 0$，根据上面的约束关系(2-19)，或者直观地，有

$$\delta x_1 = \delta x, \qquad \delta x_2 = \delta x \tag{2-22}$$

将(2-22)代入虚功方程(2-18)，得

$$(-P_1 + P_2)\delta x = 0$$

由于$\delta x \neq 0$，得

$$P_1 = P_2 \tag{2-23}$$

再取 $\delta x=0$，$\delta y\neq 0$，由约束(2-19)得

$$\delta x_1=\delta y\cdot \mathrm{tg}\alpha,\quad \delta x_2=-\delta y\cdot \mathrm{tg}\alpha \tag{2-24}$$

将(2-24)代入虚功方程(2-18)，得

$$(P-P_1\mathrm{tg}\alpha-P_2\mathrm{tg}\alpha)\delta y=0$$

由于 $\delta y\neq 0$，故得

$$P=(P_1+P_2)\mathrm{tg}\alpha=2P_1\mathrm{tg}\alpha \tag{2-25}$$

例4. 由 n 个长 l、重 P、在铅垂面内的均匀杆组成的系统，其中第一个杆一端固定，其余各杆用铰链顺次联结(图2-4)。今在最末一杆的一端加一水平力 $\boldsymbol{Q}$，试求系统处于平衡时第 i 个杆与铅垂线的夹角 θ_i。

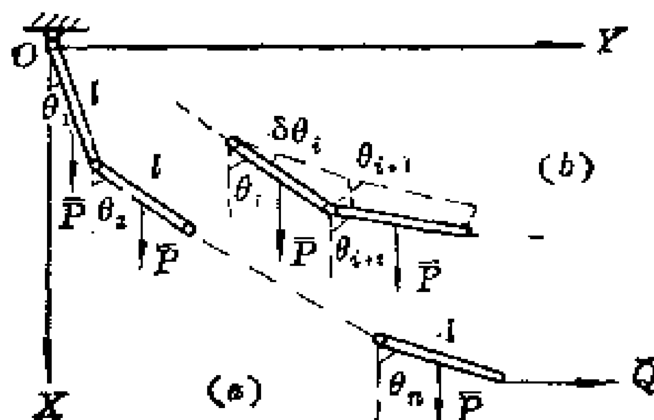


图 2-4

解：设所有铰链都是光滑的，系统所受约束是理想约束，可用虚位移原理求解。

系统有 n 个自由度，取杆与铅垂线的夹角 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$ 为广义坐标。各杆中点的铅垂坐标为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，第 n 个杆末端的水平坐标为 y_Q。列写虚功方程：

$$P\delta x_1+P\delta x_2+\cdots+P\delta x_n+Q\delta y_Q=0 \tag{2-26}$$

因
$$x_1=\frac{l}{2}\cos\theta_1$$

$$x_2=l\cos\theta_1+\frac{l}{2}\cos\theta_2$$

$$\vdots$$

$$x_n=l(\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_{n-1})+\frac{l}{2}\cos\theta_n$$

$$y_Q=l(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_{n-1}+\sin\theta_n)$$

故

$$\left.\begin{aligned}
\delta x_1&=-\frac{l}{2}\sin\theta_1\delta\theta_1\\
\delta x_2&=-l\sin\theta_1\delta\theta_1-\frac{l}{2}\sin\theta_2\delta\theta_2\\
&\vdots\\
\delta x_n&=-l(\sin\theta_1\delta\theta_1+\sin\theta_2\delta\theta_2+\cdots\\
&\qquad+\sin\theta_{n-1}\delta\theta_{n-1})-\frac{l}{2}\sin\theta_n\delta\theta_n\\
\delta y_Q&=l(\cos\theta_1\delta\theta_1+\cos\theta_2\delta\theta_2+\cdots\\
&\qquad+\cos\theta_{n-1}\delta\theta_{n-1}+\cos\theta_n\delta\theta_n)
\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}27)$$

将(2-27)代入(2-26)，整理得

$$\begin{aligned}
&\left\{-l\left[\frac{P}{2}\sin\theta_1+(n-1)P\sin\theta_1\right]+lQ\cos\theta_1\right\}\delta\theta_1\\
&+\left\{-l\left[\frac{P}{2}\sin\theta_2+(n-2)P\sin\theta_2\right]+lQ\cos\theta_2\right\}\delta\theta_2\\
&+\cdots+\left\{-l\left[\frac{P}{2}\sin\theta_{n-1}+P\sin\theta_{n-1}\right]+lQ\cos\theta_{n-1}\right\}\delta\theta_{n-1}\\
&+\left\{-l\left[\frac{P}{2}\sin\theta_n\right]+lQ\cos\theta_{n-}\right\}\delta\theta_n=0
\end{aligned}\qquad(2\text{-}28)$$

因上式中 $\delta\theta_1$，$\delta\theta_2$，…，$\delta\theta_{n-1}$，$\delta\theta_n$ 彼此独立，故其前面的系数为零，即

$$\left.\begin{aligned}
&-P\sin\theta_1\left(\frac{1}{2}+n-1\right)+Q\cos\theta_1=0\\
&-P\sin\theta_2\left(\frac{1}{2}+n-2\right)+Q\cos\theta_2=0\\
&\vdots\\
&-P\sin\theta_{n-1}\left(\frac{1}{2}+1\right)+Q\cos\theta_{n-1}=0\\
&-P\sin\theta_n\left(\frac{1}{2}\right)+Q\cos\theta_n=0
\end{aligned}\right\}\tag{2-29}$$

由此解得

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{tg}\theta_1=\frac{2Q}{(2n-1)P}\\
&\mathrm{tg}\theta_2=\frac{2Q}{(2n-3)P}\\
&\vdots\\
&\mathrm{tg}\theta_{n-1}=\frac{2Q}{3P}\\
&\mathrm{tg}\theta_n=\frac{2Q}{P}
\end{aligned}\right\}\tag{2-30}$$

因此第 i 个杆与铅垂线的夹角 θ_i 为

$$\mathrm{tg}\theta_i=\frac{2Q}{[2n-(2i-1)]P}\tag{2-31}$$

为求第 i 个杆与铅垂线的夹角 θ_i，还可以用取特殊的虚位移的方法来求解。今让第 i 个杆有虚位移 $\delta\theta_i$，其余各虚位移 $\delta\theta_j=0(j\neq i)$。我们来计算各力的虚功。

第 1 个杆至第 $i-1$ 个杆不动；第 i 个杆转一小角 $\delta\theta_i$

(图 2-4b)，此杆中心上升的高度（保留一阶无穷小）为

$$\frac{l}{2}[\cos\theta_i-\cos(\theta_i+\delta\theta_i)]\approx l\sin\theta_i\delta\theta_i$$

第 $i+1$ 个杆至第 n 个杆中心上升的高度与第 i 个杆末端上升的高度一样，为

$$l[\cos\theta_i-\cos(\theta_i+\delta\theta_i)]\approx l\sin\theta_i\delta\theta_i$$

第 n 个杆末端水平（向右）移动的距离与第 i 个杆末端的一样，为

$$l[\sin(\theta_i+\delta\theta_i)-\sin\theta_i]\approx l\cos\theta_i\delta\theta_i$$

通过上面的直观分析，可将虚位移原理写成

$$-P\frac{l}{2}\sin\theta_i\delta\theta_i-Pl(n-i)\sin\theta_i\delta\theta_i+Ql\cos\theta_i\delta\theta_i=0$$

即

$$\left\{-P\left(n-i+\frac{1}{2}\right)\sin\theta_i+Q\cos\theta_i\right\}\delta\theta_i=0$$

因 $\delta\theta_i\neq0$，故 $\delta\theta_i$ 前的系数为零，于是得

$$\operatorname{tg}\theta_i=\frac{2Q}{(2n-2i+1)P}$$

所得结果与(2-31)一样。

读者试用几何静力学方法解此题。

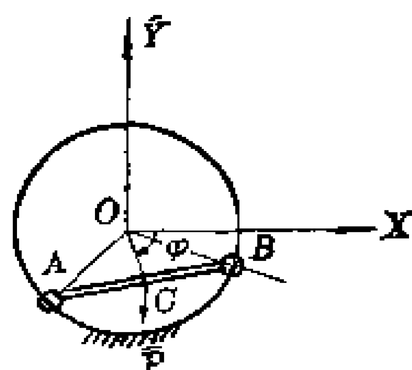


图 2-5

例5. 均匀杆 AB 长 l，重 P，约束在一固定光滑的铅直圆环中，圆环的半径为 R（图 2-5），求平衡位置。

解：根据约束条件，显然自由度为一。如图 2-5 所示，取杆

质心的纵坐标 y_c 为广义坐标，则杆的位置完全确定。平衡时，虚功方程为

$$P\delta y_c=0 \tag{2-32}$$

但 $P\neq0$，故有 $\delta y_c=0$。由

$$y_c=-\overline{OC}\sin\varphi=-\sqrt{R^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}\sin\varphi$$

得

$$\delta y_c=-\sqrt{R^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}\cos\varphi\delta\varphi=0$$

又因 $\delta\varphi\neq0$，必须有

$$\cos\varphi=0$$

因此

$$\varphi=\frac{\pi}{2},\qquad \frac{3}{2}\pi \tag{2-33}$$

即杆在水平位置时保持平衡。

例6. 设有三跨度的联合梁，由 AM，MN，ND 组成，用铰链连于 M，N 两点，共有四个支座 A，B，C，D（图 2-6a），试求支座反力。

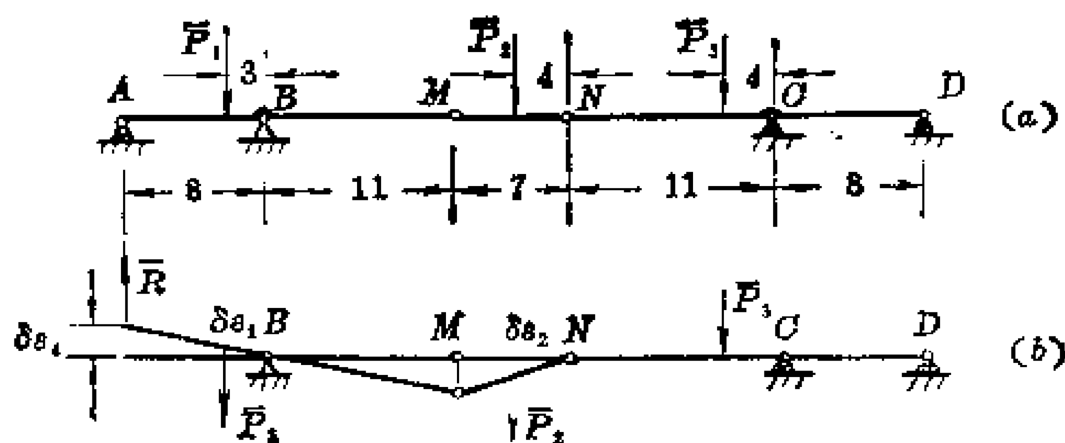


图 2-6

解：为求支座A的反力，可将支座A除去，代之以支座反力$\boldsymbol{R}$，并将其当作主动力来处理。这样，系统的自由度不再是零而变成一。系统的虚位移如图 2-6b 所示。令力$\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，$\boldsymbol{P}_3$及$\boldsymbol{R}$的作用点的虚位移各为δs_1，δs_2，δs_3，δs_4，显然$\delta s_3=0$。铰链M的虚位移为δs。列写虚功方程

$$R\delta s_4-P_1\delta s_1+P_2\delta s_2=0 \tag{2-34}$$

根据几何关系，有

$$\delta s_1=\frac{3}{8}\delta s_4\text{，}\ \delta s_2=\frac{4}{7}\delta s=\frac{4}{7}\cdot\frac{11}{8}\delta s_4=\frac{11}{14}\delta s_4$$

将其代入方程(2-34)，再根据δs_4的任意性，便得

$$R=\frac{3}{8}P_1-\frac{11}{14}P_2 \tag{2-35}$$

用类似的方法可求其它支座的反力。

这一例子说明，利用虚位移原理不但可以求平衡时的主动力，还可以求约束反力。这时，只须解除约束而把该处的约束反力当作主动力看待就可以了。

2. 利用虚位移原理求平衡位置及其稳定性

(1) 力具有势函数的平衡条件

若质点系中每一质点m_i的作用力$\boldsymbol{F}_i$都具有势函数V，那么

$$F_{ix}=-\frac{\partial V}{\partial x_i},\quad F_{iy}=-\frac{\partial V}{\partial y_i},\quad F_{iz}=-\frac{\partial V}{\partial z_i} \tag{2-36}$$

将(2-36)代入虚位移原理的表达式(2-4)，便得

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N}(F_{ix}\delta x_i+F_{iy}\delta y_i+F_{iz}\delta z_i)\\&=-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial V}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial V}{\partial z_i}\delta z_i\right)\end{aligned}$$

$$=-\delta V(x_i, y_i, z_i)=0 \tag{2-37}$$

所以力具有势函数时的平衡条件是：势函数（势能）具有稳定值，也只有在这时才处于平衡状态。

例如，在重力场中，若质点系只受重力作用，那么

$$V=\sum_{i=1}^{N} m_i g z_i$$

因此，平衡条件(2-37)成为

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial z_i}\delta z_i=\sum_{i=1}^{N} m_i g \delta z_i=g\sum_{i=1}^{N} m_i \delta z_i=gM\delta z_c=0 \tag{2-38}$$

其中

$$z_c=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

为系统质心的坐标，$M=\sum_{i=1}^{N} m_i$ 为系统的质量。所以，重力作用下的质点系平衡时重心的高度具有稳定值。

(2) 平衡位置的稳定性

设质点系仅有一个自由度，独立参数为 q。势函数是 $V(q)$，q_0 是此质点系的一个平衡位置，即

$$\left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{q=q_0}=0 \tag{2-39}$$

将 $V(q)$按泰勒级数展开

$$V(q)=V(q_0)+\left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{q=q_0}(q-q_0)+\frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\right|_{q=q_0}(q-q_0)^2+\cdots \tag{2-40}$$

于是，若

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}<0,\ V(q_0)\text{为}V(q)\text{的极大值，}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}>0,\ V(q_0)\text{为}V(q)\text{的极小值。}$$

将 $V(q)$ 对 q 求导数，则由(2-40)得

$$\begin{aligned}Q&=-\frac{\partial V}{\partial q}=-\frac{\partial V}{\partial q}\bigg|_{q=q_0}-\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\bigg|_{q=q_0}(q-q_0)+\cdots\\&=-\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\bigg|_{q=q_0}(q-q_0)+\cdots\end{aligned}\tag{2-41}$$

由(2-41)知，如果 $\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\Big|_{q=q_0}>0$，则广义力 Q 和位移 $(q-q_0)$ 符号相反，即 Q 使质点系恢复到平衡位置 q_0。所以在 q_0 质点系是稳定平衡。反之，如果 $\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\Big|_{q=q_0}<0$，则是不稳定平衡。如果 $\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}=0$，则上述判别不能确定。若在 q_0 处 V 首先不为零的导数是 n 阶，即

$$\frac{\partial V}{\partial q}\bigg|_{q=q_0}=0,\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\bigg|_{q=q_0}=0,\cdots$$

$$\frac{\partial^{n-1} V}{\partial q^{n-1}}\bigg|_{q=q_0}=0,\quad \frac{\partial^n V}{\partial q^n}\bigg|_{q=q_0}\neq 0,$$

若 n 为偶数，$\frac{\partial^n V}{\partial q^n}\Big|_{q=q_0}<0$ 时 $V(q_0)$ 为极大值，则是不稳定平衡；$\frac{\partial^n V}{\partial q^n}\Big|_{q=q_0}>0$ 时 $V(q_0)$ 为极小值，则是稳定平衡。

对两个自由度系统，独立参数是 q_1, q_2；势函数是 $V(q_1,$

q_2)，则平衡条件是

$$\frac{\partial V}{\partial q_1}=0, \qquad \frac{\partial V}{\partial q_2}=0 \tag{2-42}$$

若 q_{10}，q_{20} 适合方程(2-42)，将 $V(q_1, q_2)$在点(q_{10}, q_{20})附近展开为泰勒级数，则

$$V(q_1,q_2)-V(q_{10},q_{20})=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\bigg|_{q_{10},q_{20}}(q_1-q_{10})^2\right.$$

$$+2\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}\bigg|_{q_{10},q_{20}}(q_1-q_{10})(q_2-q_{20})$$

$$\left.+\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\bigg|_{q_{10},q_{20}}(q_2-q_{20})^2\right\}+\cdots$$

令

$$\Delta=\left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}\right)^2-\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right]_{q_{10},q_{20}}$$

则由高等数学知 $\Delta>0$ 时 V_0 非极值，$\Delta=0$ 时问题不能确定，V_0 为极值时必须 $\Delta<0$。此时

$\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}<0$ 时 V_0 为极大，$\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}>0$ 时 V_0 为极小。

(3) 例题

例1. 我们重新研究本节第一项中的例5，求其平衡位置并讨论其稳定性。

解： 杆的势能为（以 O 为零点）

$$V=Py_c=-P\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}\cdot\sin\varphi \tag{2-43}$$

杆平衡时，有

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi}=0$$

因

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi}=-P\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}\cdot\cos\varphi$$

故平衡时，有

$$\cos\varphi=0 \tag{2-44}$$

所以平衡位置有两个，记作

$$\varphi_0'=\frac{\pi}{2}, \qquad \varphi_0''=\frac{3}{2}\pi。 \tag{2-45}$$

为判断此二平衡位置是否稳定，今计算$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right|_{\varphi_0}$。因

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}=P\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}\cdot\sin\varphi,$$

当$\varphi=\frac{\pi}{2}$时，

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right|_{\varphi_0'}=P\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}>0;$$

当$\varphi=\frac{3}{2}\pi$时，

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right|_{\varphi_0''}=-P\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}<0$$

因此，$\varphi_0'=\frac{\pi}{2}$是稳定平衡位置；$\varphi_0''=\frac{3}{2}\pi$是不稳定平衡位置。这从直观上不难理解：$\varphi'=\frac{\pi}{2}$相应于杆在轴 OX 下方的水平位置，在此位置上有小扰动时，重力 $\boldsymbol{P}$ 使其恢复到此平衡位置，即为稳定的。而 $\varphi_0''=\frac{3}{2}\pi$ 相应于杆在轴 OX 上方的水平位置，在此位置上一旦有小扰动，重力 $\boldsymbol{P}$ 就会使

其离开这一平衡位置，即为不稳定的。

例2. 在光滑的圆柱上放置着长为 $2l$，重量同为 P 的两均匀杆。两杆用光滑铰链相联结，求其平衡位置并讨论它的稳定性。已知圆柱半径为 a（图 2-7）。

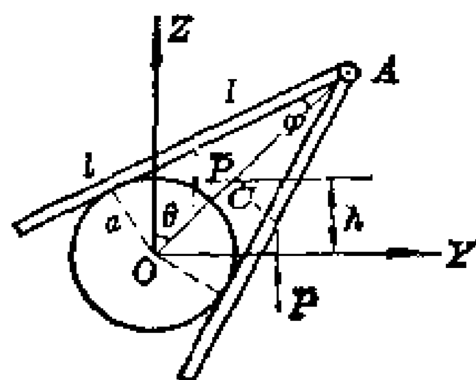


图 2-7

解：此系统的自由度为 2。设铰链 A 与圆柱中心连线 AO 与杆的夹角为 φ，AO 与铅垂线夹角为 θ，则两杆的合重心 C 离 O 的高度 h 为

$$h=\overline{OC}\cos\theta=(\overline{OA}-\overline{AC})\cos\theta$$

$$=\left(\frac{a}{\sin\varphi}-l\cos\varphi\right)\cos\theta$$

系统势能

$$V=2Ph=2P\left(\frac{a}{\sin\varphi}-l\cos\varphi\right)\cos\theta \tag{2-46}$$

θ 与 φ 应该符合条件：

$$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}, \qquad \varphi<\frac{\pi}{2} \tag{2-47}$$

系统平衡条件为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial\varphi}&=2P\left(-\frac{a\cos\varphi}{\sin^2\varphi}+l\sin\varphi\right)\cos\theta=0\\ \frac{\partial V}{\partial\theta}&=-2P\left(\frac{a}{\sin\varphi}-l\cos\varphi\right)\sin\theta=0\end{aligned}\right\} \tag{2-48}$$

考虑到条件(2-47)，将(2-45)表为

$$\left.\begin{array}{l}\sin\theta=0\\ l\sin\varphi-\dfrac{a\cos\varphi}{\sin^2\varphi}=0\end{array}\right\}$$

于是

$$\left.\begin{array}{l}\theta=0\\ l\,\mathrm{tg}^3\varphi-a(1+\mathrm{tg}^2\varphi)=0\end{array}\right\}\qquad(2\text{-}49)$$

由后者得一实根$\mathrm{tg}\varphi_0$，即得平衡位置 $\theta=0$，$\varphi=\varphi_0$。

为判断此平衡位置的稳定性，计算V的二阶偏导数

$$\frac{\partial^2V}{\partial\varphi^2}=2P\left(l\cos\varphi+a\frac{2\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{\sin^3\varphi}\right)\cos\theta,$$

$$\frac{\partial^2V}{\partial\varphi\partial\theta}=-2P\left(-a\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}+l\sin\varphi\right)\sin\theta,$$

$$\frac{\partial^2V}{\partial\theta^2}=-2P\left(\frac{a}{\sin\varphi}-l\cos\varphi\right)\cos\theta=-V$$

以 $\theta=0$，$\varphi=\varphi_0$ 代入上式，得

$$\left.\frac{\partial^2V}{\partial\varphi^2}\right|_{\substack{\theta=0\\ \varphi=\varphi_0}}=2P\left(l\cos\varphi_0+a\frac{2\cos^2\varphi_0+\sin^2\varphi_0}{\sin^3\varphi_0}\right)>0$$

$$\left.\frac{\partial^2V}{\partial\varphi\partial\theta}\right|_{\substack{\theta=0\\ \varphi=\varphi_0}}=0$$

$$\left.\frac{\partial^2V}{\partial\theta^2}\right|_{\substack{\theta=0\\ \varphi=\varphi_0}}=-2P\left(\frac{a}{\sin\varphi_0}-l\cos\varphi_0\right)=-2P\cdot\overline{OC}$$

所以

$$\Delta=\left[\left(\frac{\partial^2V}{\partial\varphi\partial\theta}\right)^2-\frac{\partial^2V}{\partial\varphi^2}\,\frac{\partial^2V}{\partial\theta^2}\right]_{\substack{\theta=0\\ \varphi=\varphi_0}}=\left.\frac{\partial^2V}{\partial\varphi^2}\right|_{\substack{\theta=0\\ \varphi=\varphi_0}}\cdot2P\cdot\overline{OC}$$

因$\left.\dfrac{\partial^2V}{\partial\varphi^2}\right|_{\substack{\theta=0\\ \varphi=\varphi_0}}>0$，所以极值存在的条件$\Delta<0$成为$\overline{OC}<0$，

此时$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}\right|_{\substack{\theta=0\\ \varphi=\varphi_0}}>0$，平衡是稳定的。$\overline{OC}<0$表示杆的重心$C$应该在圆柱中心$O$的下面。

3*. 虚位移原理对有多余坐标的完整系统和对非完整系统的应用

(1) 虚位移原理对有多余坐标的完整系统的应用

一、设某完整系统的广义坐标为$q_1,q_2,\cdots,q_n$，取m个多余坐标$q_{n+1},\cdots,q_{n+m}$。m个理想完整约束表为

$$f_\gamma(q_1,\cdots,q_n,q_{n+1},\cdots,q_{n+m})=0 \quad (\gamma=1,2,\cdots,m) \tag{2-50}$$

设由(2-50)可解出多余坐标为广义坐标的函数

$$q_{n+\gamma}=q_{n+\gamma}(q_1,q_2,\cdots,q_n) \tag{2-51}$$

对(2-50)和(2-51)取变分，有

$$\sum_{u=1}^{n+m}\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_u}\delta q_u=0 \quad (\gamma=1,2,\cdots,m) \tag{2-52}$$

和

$$\delta q_{n+\gamma}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial q_{n+\gamma}}{\partial q_s}\delta q_s \quad (\gamma=1,2,\cdots,m) \tag{2-53}$$

虚位移原理可表为形式

$$\sum_{u=1}^{n+m}Q_u\delta q_u=0 \tag{2-54}$$

为得到有多余坐标的完整力学系统的平衡条件可采用两种办法：

第一种办法是将(2-53)代入(2-54)，得

$$\sum_{s=1}^{n}Q_s\delta q_s+\sum_{s=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{m}Q_{n+\gamma}\frac{\partial q_{n+\gamma}}{\partial q_s}\delta q_s=0 \tag{2-55}$$

由 δq_s 的独立性，得到

$$Q_s + \sum_{\gamma=1}^{m} Q_{n+\gamma} \frac{\partial q_{n+\gamma}}{\partial q_s} = 0 \quad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (2\text{-}56)$$

第二种办法是拉格朗日乘子法。将(2-52)乘以 λ_γ 并对 γ 求和，得到

$$\sum_{\gamma=1}^{m} \sum_{u=1}^{n+m} \lambda_\gamma \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_u} \delta q_u = 0 \qquad (2\text{-}57)$$

将(2-57)与(2-54)相加，得到

$$\sum_{u=1}^{n+m} \left(Q_u + \sum_{\gamma=1}^{m} \lambda_\gamma \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_u} \right) \delta q_u = 0 \qquad (2\text{-}58)$$

在(2-58)中如此选择乘子 λ_γ 使 $\delta q_{n+\rho}(\rho=1,2,\cdots,m)$前的系数为零，即

$$Q_{n+\rho} + \sum_{\gamma=1}^{m} \lambda_\gamma \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_{n+\rho}} = 0 \quad (\rho=1,2,\cdots,m) \quad (2\text{-}59)$$

于是(2-58)成为

$$\sum_{s=1}^{n} \left(Q_s + \sum_{\gamma=1}^{m} \lambda_\gamma \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_s} \right) \delta q_s = 0 \qquad (2\text{-}60)$$

由上式中 δq_s 的独立性，得到

$$Q_s + \sum_{\gamma=1}^{m} \lambda_\gamma \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_s} = 0 \qquad (2\text{-}61)$$

现将(2-59)与(2-61)联合，便得方程

$$Q_u + \sum_{\gamma=1}^{m} \lambda_\gamma \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_u} = 0 \quad (u=1,2,\cdots,n+m) \qquad (2\text{-}62)$$

方程(2-56)和(2-62)就是有多余坐标的双面、理想、完整力学系统的平衡条件。方程(2-56)不含乘子，仅有 n 个关系。方程(2-62)的数目为 $n+m$ 个，其中包含 m 个乘子 λ_γ。

二、例题

设在图(1-5)的杆 OA 上加一力偶 M_1，其转向为逆时针的。问在杆 BC 上加一多大力偶 M_3 才能使机构平衡？

解：选 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 为广义坐标，有两个约束方程(1-27)，即

$$\left.\begin{aligned}&a_1\cos\varphi_1+a_2\cos\varphi_2+a_3\cos\varphi_3-d=0\\&a_1\sin\varphi_1+a_2\sin\varphi_2-a_3\sin\varphi_3=0\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}63)$$

设力偶 M_3 逆时针转向为正，虚位移原理给出

$$M_1\delta\varphi_1-M_3\delta\varphi_3=0\qquad(2\text{-}64)$$

对(2-63)取变分，有

$$\left.\begin{aligned}&a_1\delta\varphi_1\sin\varphi_1+a_2\delta\varphi_2\sin\varphi_2+a_3\delta\varphi_3\sin\varphi_3=0\\&a_1\delta\varphi_1\cos\varphi_1+a_2\delta\varphi_2\cos\varphi_2-a_3\delta\varphi_3\cos\varphi_3=0\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}65)$$

由上式消去 $\delta\varphi_2$，得到

$$a_1\delta\varphi_1\sin(\varphi_1-\varphi_2)+a_3\delta\varphi_3\sin(\varphi_2+\varphi_3)=0\qquad(2\text{-}66)$$

将(2-66)代入(2-64)，消去 $\delta\varphi_3$，得到

$$M_1+M_3\frac{a_1\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{a_3\sin(\varphi_2+\varphi_3)}=0$$

因此

$$M_3=-M_1\frac{a_3\sin(\varphi_2+\varphi_3)}{a_1\sin(\varphi_1-\varphi_2)}\qquad(2\text{-}67)$$

其中“－”号表示 M_3 应为顺时针方向。

此题也可用乘子法求解。将(2-65)第一式乘以 λ_1，第二式乘以 λ_2，则方程(2-62)给出

$$\left.\begin{aligned}&M_1+\lambda_1a_1\sin\varphi_1+\lambda_2a_1\cos\varphi_1=0\\&-M_3+\lambda_1a_3\sin\varphi_3-\lambda_2a_3\cos\varphi_3=0\\&\lambda_1a_2\sin\varphi_2+\lambda_2a_2\cos\varphi_2=0\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}68)$$

由此可解出

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1&=\frac{-M_1\cos\varphi_2}{a_1\sin(\varphi_1-\varphi_2)}\\ \lambda_2&=\frac{M_1\sin\varphi_2}{a_1\sin(\varphi_1-\varphi_2)}\\ M_3&=-M_1\frac{a_3\sin(\varphi_2+\varphi_3)}{a_1\sin(\varphi_1-\varphi_2)}\end{aligned}\right\}\tag{2-69}$$

(2) 虚位移原理对非完整系统的应用

一、设力学系统的位置由 n 个独立的广义坐标 q_1, q_2, …, q_n 来确定，系统受有 g 个双面、理想、线性、齐次稳定的非完整约束

$$\sum_{s=1}^{n} A_{\beta s}\dot{q}_s=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{2-70}$$

其中 $A_{\beta s}$ 仅为 q_1, q_2, …, q_n 的函数。

虚位移原理给出

$$\sum_{s=1}^{n} Q_s\delta q_s=0 \tag{2-71}$$

非完整约束(2-70)加在变分 δq_s 上的条件为

$$\sum_{s=1}^{n} A_{\beta s}\delta q_s=0 \tag{2-72}$$

为得到系统平衡条件，可应用拉格朗日乘子法，类似于前面(1)中的讨论，我们有

$$Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta A_{\beta s}=0 \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{2-73}$$

假设由非完整约束(2-70)可解出后面 g 个广义速度，即

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\dot{q}_\sigma \tag{2-74}$$

$$(\beta=1,2,\cdots,g;\ \varepsilon=n-g)$$

则广义坐标变分间有关系

$$\delta q_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\delta q_{\sigma} \tag{2-75}$$

将(2-75)代入(2-71)，我们得到

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left\{ Q_{\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g} Q_{\varepsilon+\beta}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\right\}\delta q_{\sigma}=0$$

由 δq_{σ} 的独立性，得到方程

$$Q_{\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g} Q_{\varepsilon+\beta}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}=0 \quad (\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{2-76}$$

方程(2-73)、(2-76)即为线性、稳定非完整力学系统的平衡条件。

二、例题

设某系统位置由 x，y，θ 三个参数确定，系统所受约束是理想的，方程为 $\dot{y}=\dot{x}\mathrm{tg}\theta$，试用虚位移原理导出系统平衡条件。

解：设作用于系统上的主动力系向点 (x, y) 简化为力 F_x, F_y 和力偶矩 M，虚位移原理给出

$$F_x\delta x+F_y\delta y+M\delta\theta=0 \tag{2-77}$$

非完整约束加在虚位移上的条件为

$$\delta y=\delta x\mathrm{tg}\theta \tag{2-78}$$

将(2-78)代入(2-77)，得到

$$(F_x+F_y\mathrm{tg}\theta)\delta x+M\delta\theta=0 \tag{2-79}$$

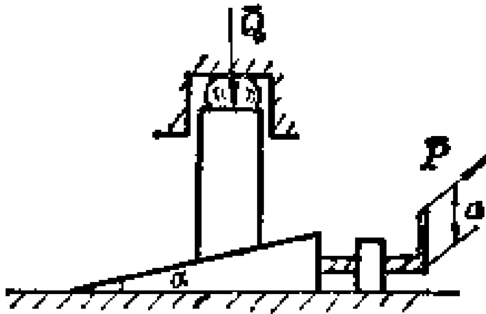
因(2-79)中的 δx，$\delta\theta$ 彼此独立，故得

$$\left.\begin{aligned} &F_x+F_y\mathrm{tg}\theta=0\\ &M=0\end{aligned}\right\} \tag{2-80}$$

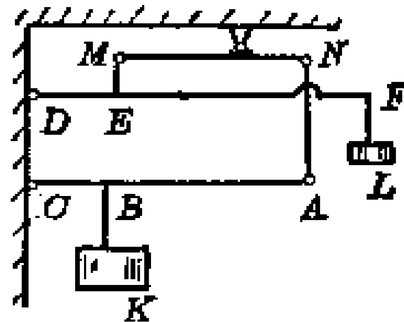
第二章 习 题

2-1 楔式压榨机，力 P 垂直于手柄轴；手柄长 a，螺纹升距为 h，楔尖顶角 α，试求力 P 与力 Q 之间的关系。

答： $Q=P\frac{2\pi a}{h\mathrm{tg}\alpha}$



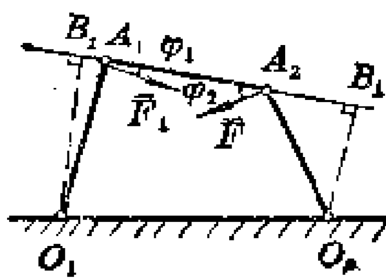
题 2-1 图



题 2-2 图

2-2 如图示，重物 K 与 L 用杠杆相联而处于平衡状态。已知$\frac{BC}{AC}=\frac{1}{10}$，$\frac{ON}{OM}=\frac{1}{3}$，$\frac{DE}{DF}=\frac{1}{10}$，试求重物重量之间的关系$\frac{P_L}{P_K}$。

答：$P_L=\frac{1}{300}P_K$



题 2-3 图

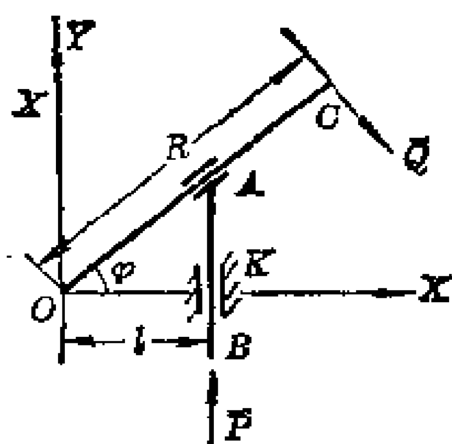
2-3 在铰链四连杆机构 $O_1A_1A_2O_2$ 的铰链 A_1 与 A_2 处作用有力 F_1 与 F，此二力分别垂直于杆子 O_1A_1 与 O_2A_2，四连杆处于平衡状态。求力 F_1，F 之比与自转动轴 O_1 与 O_2 到杆子

A_1A_2 的最短距离之关系。

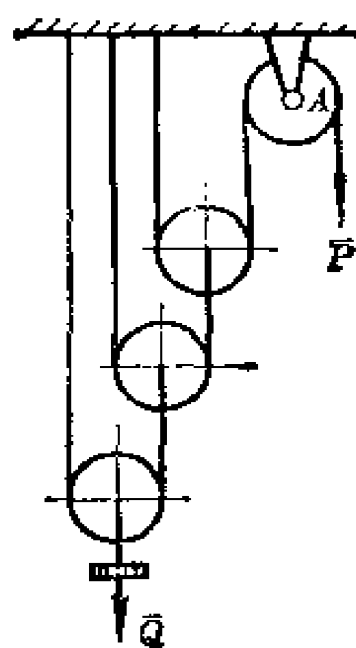
答：$\frac{F_1}{F}=\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}=\frac{O_1B_1}{O_1A_1}\cdot\frac{O_2A_2}{O_2B_2}$

2-4　在滑道连杆机构中，当曲柄 OC 绕水平轴 O 摆动时，滑块 A 沿曲柄 OC 滑动并带动一沿铅垂导板 K 运动的杆子 AB，已知 $OC=R$，$OK=l$，问 C 点垂直力 Q 多大才能平衡 P。

答：$Q=\frac{Pl}{R\cos^2\varphi}$



题 2-4 图



题 2-5 图

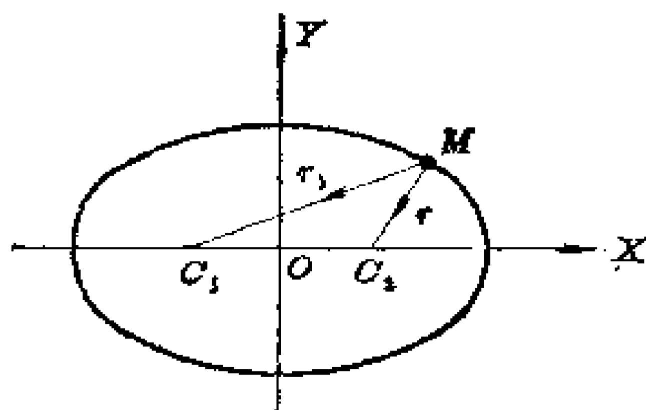
2-5　一滑轮组由一定滑轮 A 与 n 个动滑轮所组成。试求平衡时被举起的重物 Q 与作用于绳子一端的力 P 之比值。

答：$\frac{Q}{P}=2^n$

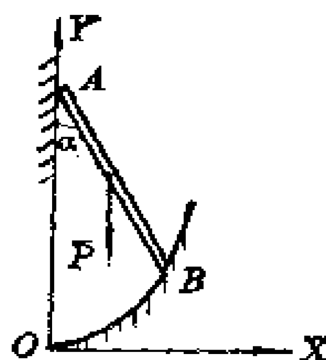
2-6　一小球 M 在一光滑管内，此管成一长轴为 $2a$ 的椭圆形状并位于水平面内。此球受椭圆二焦点的吸引，引力和距离平方成反比，其中一焦点吸引力的比例系数为 K^2，另

一为 K_1^2。求小球在平衡位置时的矢径 r 及 r_1。

答： $r=\dfrac{2aK}{K+K_1}$， $r_1=\dfrac{2aK_1}{K+K_1}$



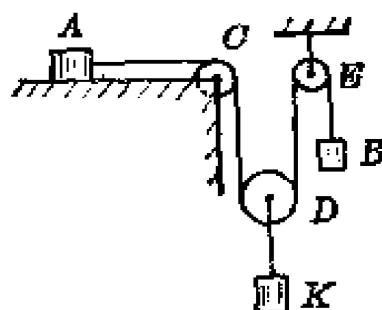
题 2-6 图



题 2-7 图

2-7 均匀杆 $AB=a$，重 P，一端靠在铅垂光滑墙上，另一端在光滑地面上。如欲使杆子在铅垂面内任意位置都能平衡，试求此地面的形状。

答：椭圆 $x_B^2+(2y_B-a)^2=a^2$



题 2-8 图

2-8 两重量相等的重物 A 与 B 分别系于一无重量且不可伸长的绳之两端，此绳自 A 起平行于水平面延伸，绕过定滑轮 C 再包围动滑轮 D，最后绕过定滑轮 E，在这几绳子另端挂上重物 B。重物 K 重 Q 挂在 D 上，求重物 A 与 B 中每一重物的重量 P 以及重物 A 对水平面的摩擦系数。

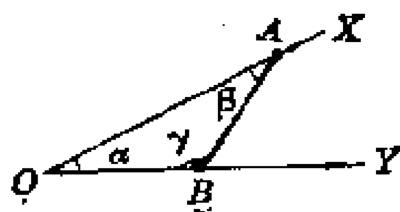
答：$P=\dfrac{Q}{2}$，$f=1$

2-9 A，B 两点用一不可伸长的线联结，此二点可沿固定直线 OX，OY 滑动，OX 与 OY 成角 α。这两点均受

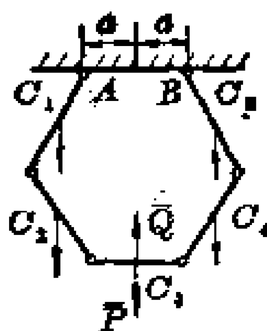
O点排斥，排斥力与距离成正比，对A点的力其比例系数为K_1，对B点的力其比例系数为K_2。求在平衡位置时线与直线OA与OB所成之角β与γ。

答：$\text{tg}^2\beta = -\dfrac{K_1 \sin 2\alpha}{K_2 + K_1 \cos 2\alpha}$，

$$\text{tg}^2\gamma = -\frac{K_2 \sin 2\alpha}{K_2 + K_1 \cos 2\alpha}$$



题 2-9 图

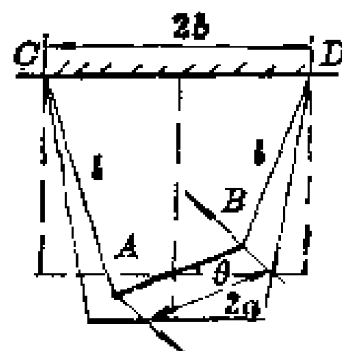


题 2-10 图

2-10　一铰接六边形，由六个相同的均匀杆组成；每杆重P，且六杆处于同一铅垂面内。六边形上边固定于水平位置，其余各边位置对于通过AB中点的铅垂线成对称，问欲使系统能随遇平衡，应在AB对面的水平杆中点作用多大的铅垂力？

答：$Q=3P$

2-11　均质杆AB长$2a$，重Q，两端分别悬在长l的两绳上，两绳上端悬点在同一水平线上，且相距为$2b$。若杆上加一力偶，其矩为M，求确定这杆平衡位置的角θ。

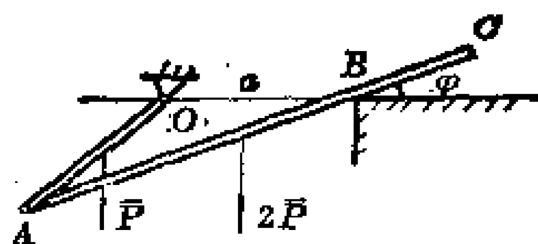


题 2-11 图

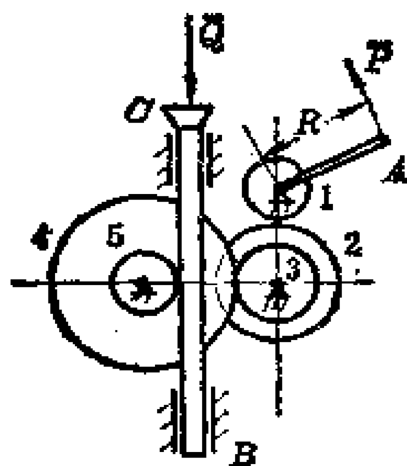
答： $M\cdot\sqrt{l^2-(a-b)^2-4ab\sin^2\frac{\theta}{2}}=Qab\sin\theta$

2-12　如图已知 $AC=2a$，$AO=OB=a$，杆 AO 重 P，杆 AC 重 $2P$，试求平衡时的角 φ。

答： $\cos\varphi=0.1+\sqrt{0.51}$



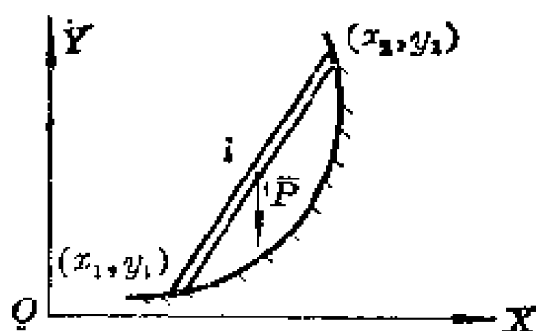
题 2-12 图



题 2-13 图

2-13　千斤顶机构中，当长为 R 的把柄 A 转动时，齿轮 1、2、3、4 与 5 也开始转动并带动千斤顶齿条 B。问在把柄端加（方向垂直于手柄）多大的力 P，才能顶起 4800N 的力 Q，而千斤顶保持平衡。已知 $r_1=3$ cm，$r_2=120$ cm，$r_3=4$ cm，$r_4=16$ cm，$r_5=3$ cm，$R=18$ cm。

答：$P=50$N



题 2-14 图

2-14　一均质杆长 l 重 P，其两端可沿曲线 $f(x,y)=0$ 无摩擦地滑动。求杆的平衡位置（y 轴沿垂向上，x 轴水平向右）。

答：在平衡位置，杆两端坐标 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 满足下列四个方程：

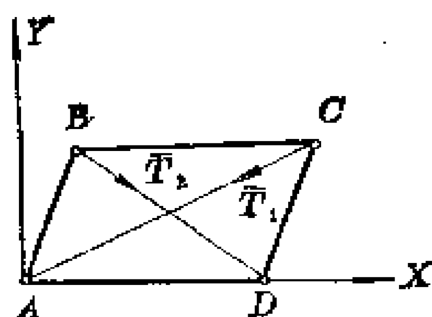
$$f(x_1, y_1)=0, \quad f(x_2, y_2)=0,$$

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-l^2=0,$$

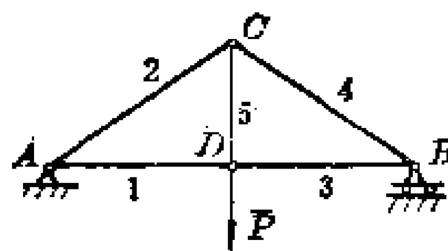
$$2(y_2-y_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f}{\partial y_1}=(x_2-x_1)\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial y_2}-\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial y_1}\right]$$

2-15 用铰链联住的平行四边形 $ABCD$，其对顶角用绳 AC 和 BD 联结，绳中张力为 T_1，T_2，试证

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{AC}{BD}$$



题 2-15 图



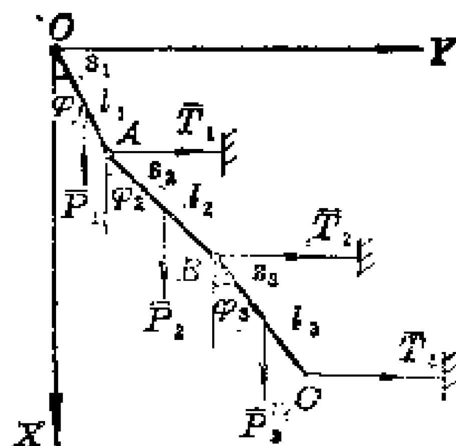
题 2-16 图

2-16 求图示桁架中杆 3 的内力，已知 $AD=BD=8\text{m}$，$DC=4\text{m}$，$P=30\text{kN}$。

答：$S_3=P$

2-17 三杆系统如图。各杆重心距上端为 s_1，s_2，s_3，各杆长为 l_1，l_2，l_3，重为 P_1，P_2，P_3。在 A，B，C 处水平地引出三条绳子，平衡时杆与铅垂线夹角为 φ_1，φ_2，φ_3。试求各绳张力 T_1，T_2，T_3。

答：



题 2-17 图

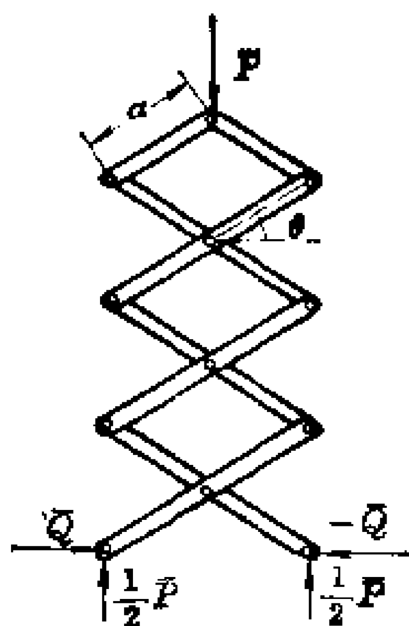
$$T_1=\left(P_1\frac{S_1}{l_1}+P_2+P_3\right)\mathrm{tg}\varphi_1-\left(P_2\frac{S_2}{l_2}+P_3\right)\mathrm{tg}\varphi_2$$

$$T_2=\left(P_2\frac{S_2}{l_2}+P_3\right)\mathrm{tg}\varphi_2-P_3\frac{S_3}{l_3}\mathrm{tg}\varphi_3$$

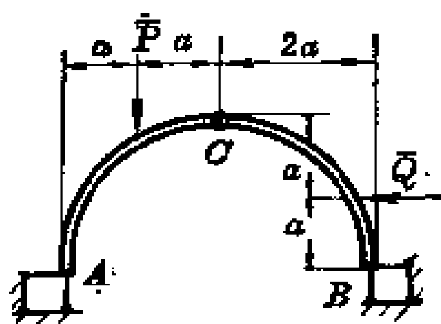
$$T_3=P_3\frac{S_3}{l_3}\mathrm{tg}\varphi_3$$

2-18 惰钳由六根长杆和两根短杆组成，长杆长 $2a$，短杆长 a，杆与杆之间用铰链联结。它在顶部受力 $\boldsymbol{P}$ 的作用，问下部力 $\boldsymbol{Q}$ 的大小应为多少才能使系统处于平衡状态？图中 θ 为已知角。

答：$Q=\frac{7}{2}P\,\mathrm{ctg}\,\theta$



题 2-18 图



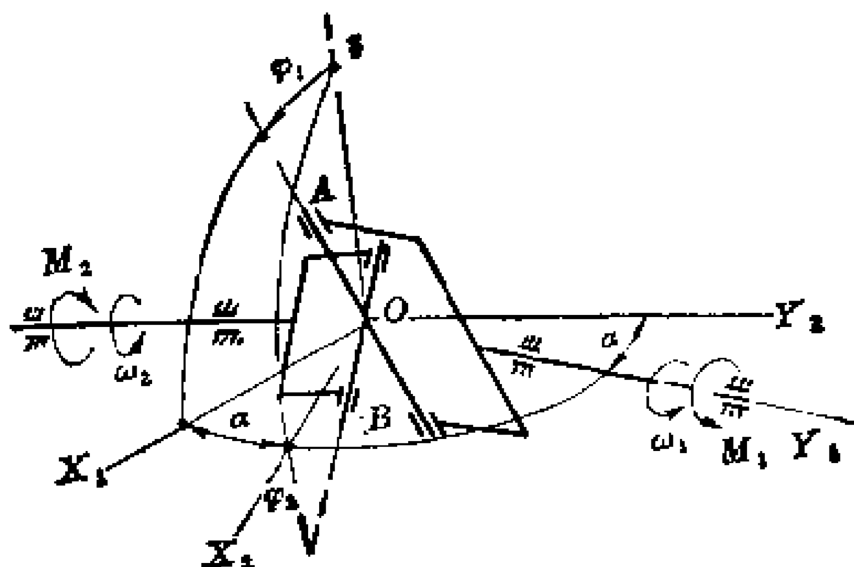
题 2-19 图

2-19 三铰拱受集中载荷 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 的作用，各部分尺寸如图示。求铰链 B 处反力的水平分力 X_B。

答：$X_B=\frac{1}{4}(3Q-P)$，方向向右。

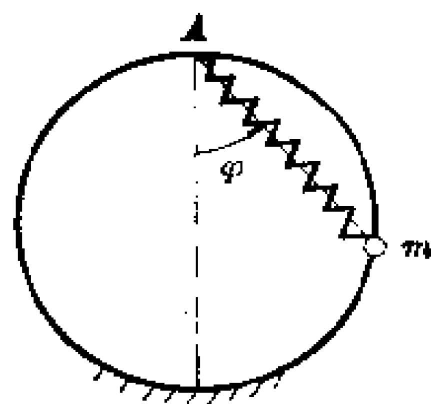
2-20　万向接头传动机构处于平衡状态。求它的主动轴及从动轴上力矩 M_1 和 M_2 之间的关系，已知两轴之间的夹角为 α（α 通常很小）。

答：$M_1 = M_2 \dfrac{\cos\alpha}{\cos^2\varphi_1 + \cos^2\alpha\sin^2\varphi_1}$



题 2-20 图

2-21　半径为 R 的光滑金属丝圆周固定在铅垂平面内。质量为 m 的小重圆环用刚度为 c 的弹簧与圆周上的最高点 A 联结，并在圆周上滑动；弹簧未变形时长为 l_0。试求小圆环的平衡位置并研究其稳定性。



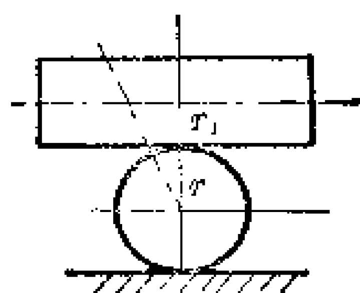
题 2-21 图

答：当 $cl_0 > 2(cR - mg)$ 时平衡位置 $\varphi = 0$ 是稳定的；当 $cl_0 < 2(cR - mg)$ 时平衡位置

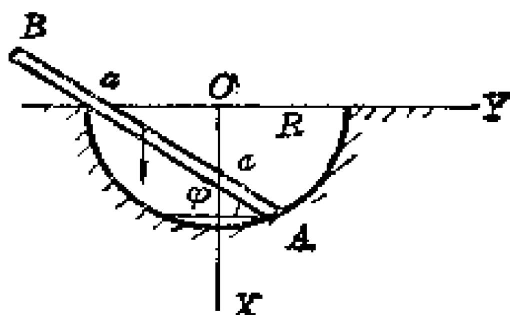
$\varphi = \cos^{-1}\left(\dfrac{c l_0}{2(cR - mg)}\right)$是稳定的。

2-22 固定圆柱体半径为 r，其轴水平，在其上放一半径为 r_1 的均匀圆柱体，其轴亦水平，且与第一个圆柱的轴相垂直，试判断平衡的稳定性。

答：$r_1 \geqslant r$ 不稳定；$r_1 < r$ 稳定。



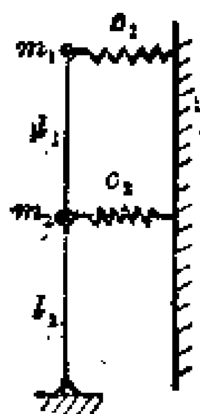
题 2-22 图



题 2-23 图

2-23 一均质杆 AB，长 $2a$，依于曲线导板上；导板形状是一半径为 R 的半圆，不计摩擦。求平衡位置并讨论其稳定性。

答： $\cos\varphi = \dfrac{1}{8R}[a + \sqrt{a^2 + 32R^2}]$；它是稳定的。



题 2-24 图

2-24 图为双摆，此摆可概略地表示为两个质量分别为 m_1，m_2，并用长 l_1，l_2 的杆相联。当摆在铅垂位置时两弹簧均不受力，又刚度为 c_1，c_2。试讨论平衡的稳定性。

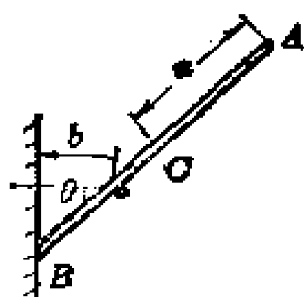
答：稳定平衡为

$$c_1 l_1 > m_1 g,$$

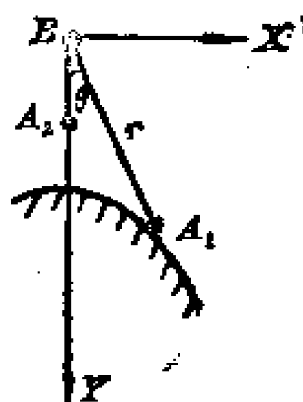
$$[(c_1 + c_2)l - (m_1 + m_2)g][c_1 l_1 - m_1 g] > c_1^2 l_1 l_2。$$

2-25　一匀质细杆 AB 长 $2a$，其 B 端与光滑垂直壁相接触，并靠在与壁相距为 b 的光滑固定销钉上如图示。试确定杆的平衡位置并讨论其稳定性。

答：$\theta=\cos^{-1}\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$，不稳定。



题 2-25 图



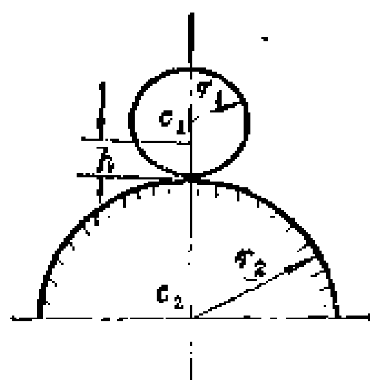
题 2-26 图

2-26　质量为 m_1，m_2 的两质点 A_1，A_2，用长为 l 的细线相连接。挂在光滑的固定销钉 B 上，A_2 铅垂向下，A_1 放在与线在同一铅垂面内的光滑曲线上，不论 A_1 在曲线上什么位置，都处于平衡。试问该曲线是何形状？

答：圆锥曲线　$r=\dfrac{l}{1-\varepsilon\cos\theta}$，

离心率 $\varepsilon=\dfrac{m_1}{m_2}$。

2-27　半径为 r_1 的小圆球，放在半径为 r_2 的固定的大圆球顶上，接触处有足够摩擦，不致产生滑动。小球的重心 c_1 在过接触点铅垂线的正上方 h 距离处如图示。试讨论小球平衡位置的稳定性。

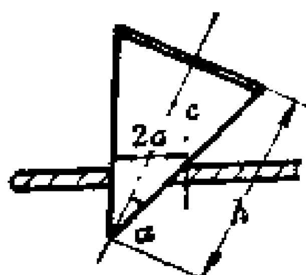


题 2-27 图

答：$\frac{1}{h}>\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$时，稳定；

$\frac{1}{h}<\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$时，不稳定；

$\left(\frac{1}{h}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right.$时，其四阶导量小于零，仍是不稳定$\left.\right)$。



题 2-28 图

2-28 一圆锥体高为h，半顶角为α，倒放在水平平板的光滑圆孔内如图示。设圆孔半径为a。试求圆锥体的平衡位置并讨论其稳定性。

答：圆锥中心线在铅垂位置时，

$16a>3h\sin 2\alpha$ 稳定；

圆锥中心线倾斜位置时，

$16a<3h\sin 2\alpha$ 不稳定。

第三章　达朗伯原理和动力学普遍方程

达朗伯原理与虚位移原理联合而构成动力学普遍方程（即达朗伯－拉格朗日原理）。动力学普遍方程是分析动力学的基础。

第一节　达朗伯原理

1．达朗伯原理

设质点系由 n 个质量为 m_i 的质点组成，每一质点的加速度为 $\boldsymbol{a}_i=\ddot{\boldsymbol{r}}_i$（$\boldsymbol{r}_i$ 为点的矢径），我们把 $\boldsymbol{\phi}_i=-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 称为惯性力，则在每一瞬时，主动力 $\boldsymbol{F}_i$，约束力 $\boldsymbol{R}_i$ 及假想的惯性力 $\boldsymbol{\phi}_i$ 必互相平衡，即

$$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{\phi}_i+\boldsymbol{R}_i=0 \quad (i=1,2,\cdots,N) \tag{3-1}$$

这就是达朗伯原理。(3-1)所表示的三种力所构成的力系相对任何中心的主矢和主矩都等于零。

由达朗伯原理可以得到作用于系统上的三种力的六个平衡条件，这六个平衡条件形式上类似于加于刚体上的力的静力学平衡条件。实际上，将(3-1)对 i 求和，得

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\phi}_i+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i=0 \tag{3-2}$$

用 $\boldsymbol{r}_i$ 矢乘(3-1)并对所有质点求和，我们有

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i)+\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{\phi}_i)+\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{R}_i)=0$$

或记作

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{m}_0(\boldsymbol{F}_i)+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{m}_0(\boldsymbol{\phi}_i)+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{m}_0(\boldsymbol{R}_i)=0 \tag{3-3}$$

其中 $\boldsymbol{m}_0$ 表示对坐标原点 O 的力矩。

将(3-2)及(3-3)投影到坐标轴上，便得六个平衡条件

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N}F_{ix}+\sum_{i=1}^{N}\phi_{ix}+\sum_{i=1}^{N}R_{ix}=0\\
&\sum_{i=1}^{N}F_{iy}+\sum_{i=1}^{N}\phi_{iy}+\sum_{i=1}^{N}R_{iy}=0\\
&\sum_{i=1}^{N}F_{iz}+\sum_{i=1}^{N}\phi_{iz}+\sum_{i=1}^{N}R_{iz}=0\\
&\sum_{i=1}^{N}m_x(\boldsymbol{F}_i)+\sum_{i=1}^{N}m_x(\boldsymbol{\phi}_i)+\sum_{i=1}^{N}m_x(\boldsymbol{R}_i)=0\\
&\sum_{i=1}^{N}m_y(\boldsymbol{F}_i)+\sum_{i=1}^{N}m_y(\boldsymbol{\phi}_i)+\sum_{i=1}^{N}m_y(\boldsymbol{R}_i)=0\\
&\sum_{i=1}^{N}m_z(\boldsymbol{F}_i)+\sum_{i=1}^{N}m_z(\boldsymbol{\phi}_i)+\sum_{i=1}^{N}m_z(\boldsymbol{R}_i)=0
\end{aligned}\right\} \tag{3-4}$$

如果将加在系统上的主动力和约束力 $\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i$ 分成内力 $\boldsymbol{F}_i^{(i)}$ 与外力 $\boldsymbol{F}_i^{(e)}$，即

$$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i=\boldsymbol{F}_i^{(i)}+\boldsymbol{F}_i^{(e)}$$

这时由(3-1)，类似(3-2)、(3-3)，得到外力与惯性力的平衡条件

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i^{(e)}+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\phi}_i=0\\
&\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{m}_0(\boldsymbol{F}_i^{(e)})+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{m}_0(\boldsymbol{\phi}_i)=0
\end{aligned}\right\} \tag{3-5}$$

因为按内力的性质，有

$$\sum_{i=1}^{N} F_i^{(i)}=0, \quad \sum_{i=1}^{N} m_0(F_i^{(i)})=0$$

将(3-5)投影到坐标轴上，我们得到类似于(3-4)的六个平衡条件。

2． 达朗伯原理的意义

首先，达朗伯原理有重要的应用价值。它能把动力学问题用静力平衡方法来解，即所谓“动静法”。用这个方法思考问题简单，而且在解某些具体动力学问题时是很方便的。

其次，达朗伯原理有重要的理论价值。它与虚位移原理联合而构成所谓“动力学普遍方程”，动力学普遍方程乃是分析动力学的基础。

3． 例题

用达朗伯原理解动力学问题，既可求加速度，又可求约束反力。尤其在求解约束反力时它显得特别方便。

例1． 一均匀细杆 AB，重 P 长 l，它与铅垂轴 OO_1 成角 α 地固结于 A。轴 OO_1 连同杆 AB 一起以常角速度 ω 转动。试确定 A 处的反力（图 3-1）。

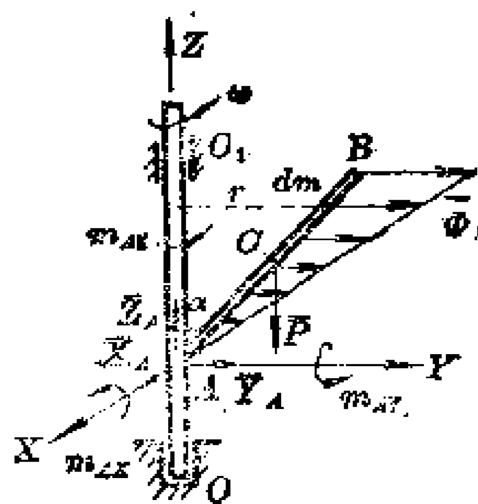


图 3-1

解： 我们取杆 AB 为研究对象。杆 AB 上的主动力为重力 $\boldsymbol{P}$，作用于 AB 的中点 C；A 处反力为主矢 $\boldsymbol{R}_A(X_A, Y_A, Z_A)$ 及主矩 $\boldsymbol{M}_A(m_{Ax}, m_{Ay}, m_{Az})$；杆上的惯性力沿杆按线性分布，距转轴为 $r(=\rho\sin\alpha)$ 处的

质量 dm 的惯性力为

$$d\phi=\omega^2 r\,dm=\omega^2\rho\sin\alpha\cdot\frac{P}{gl}d\rho$$

今取坐标系 $AXYZ$，使杆 AB 在平面 YAZ 内。利用方程(3-4)，有

$$X_A=0$$

$$Y_A+\int_0^l\omega^2\rho\sin\alpha\ \frac{P}{gl}d\rho=0$$

$$Z_A-P=0$$

$$m_{Ax}-\frac{P}{2}l\sin\alpha\ -\int_0^l\omega^2\rho\sin\alpha\ \frac{P}{gl}\rho\cos\alpha d\rho=0$$

$$m_{Ay}=0$$

$$m_{Az}=0$$

由此解得

$$X_A=0,\quad Y_A=-\frac{Pl}{2g}\omega^2\sin\alpha,\quad Z_A=P,$$

$$m_{Ax}=\frac{Pl}{2}\sin\alpha+\ \frac{P}{3g}\omega^2 l^2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=\frac{Pl}{2}\left(\sin\alpha+\ \frac{l\omega^2}{3g}\sin 2\alpha\ \right),$$

$$m_{Ay}=m_{Az}=0$$

故反力的值为

$$R_A=\sqrt{X_A^2+Y_A^2+Z_A^2}=P\sqrt{1+\frac{l^2\omega^4}{4g^2}\sin^2\alpha}\ ,$$

$$m_A=\sqrt{m_{Ax}^2+m_{Ay}^2+m_{Az}^2}$$

$$=\frac{Pl}{2}\left(\sin\alpha+\ \frac{l\omega^2}{3g}\sin 2\alpha\ \right).$$

例2. 重为 P_1 的重物 A 沿重 P 的棱柱侧面下降，用跨过无重滑轮 C 的绳子带动一重 P_2 的重物 B。认为地面、棱柱侧面及重物是光滑的。试确定棱柱对地面及对阻止棱柱移动的凸块的压力，以及绳子的张力。棱柱侧面的倾角为 α 及 β（图 3-2）。

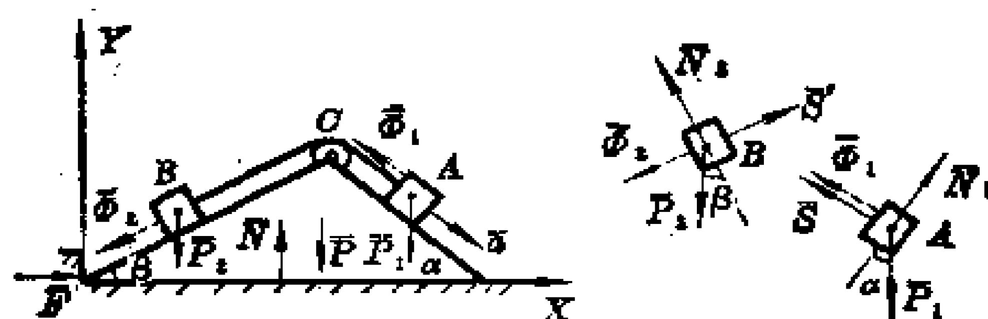


图 3-2

解： 我们取棱柱、绳子、重物及滑轮组成的系统为研究对象，来求反力 N，F。两重物的惯性力大小为

$$\Phi_1=\frac{P_1}{g}a,\qquad \Phi_2=\frac{P_2}{g}a$$

其中 a 为重物的加速度，惯性力的方向如图 3-2 所示。外力 P_1，P_2，P，N，F 及惯性力 Φ_1，Φ_2 组成平衡力系。将它们投影到轴 OX，OY 上，有

$$F-\frac{P_1}{g}a\cos\alpha-\frac{P_2}{g}a\cos\beta=0$$

$$N-P_1-P_2-P+\frac{P_1}{g}a\sin\alpha-\frac{P_2}{g}a\sin\beta=0$$

由此解得

$$F=\frac{a}{g}(P_1\cos\alpha+P_2\cos\beta) \qquad (a)$$

$$N=P_1+P_2+P-\frac{a}{g}(P_1\sin\alpha-P_2\sin\beta)\Bigg\}$$

为求绳子张力 S 及重物加速度 a，我们把达朗伯原理应用于每个重物。对重物 A，有

$$S+\frac{P_1}{g}a-P_1\sin\alpha=0 \qquad (b)$$

对重物 B，有

$$S'+\frac{P_2}{g}a-P_2\sin\beta=0 \qquad (c)$$

又因对无重滑轮，有

$$S=S' \qquad (d)$$

由$(b)(c)(d)$解得重物的加速度

$$a=g\frac{P_1\sin\alpha-P_2\sin\beta}{P_1+P_2} \qquad (e)$$

显然，为使重物 A 向下运动，必须满足条件

$$P_1\sin\alpha-P_2\sin\beta>0$$

将所得值 a 代入(a)，我们求得

$$F=\frac{(P_1\cos\alpha+P_2\cos\beta)(P_1\sin\alpha-P_2\sin\beta)}{P_1+P_2}$$

$$N=P_1+P_2+P-\frac{(P_1\sin\alpha-P_2\sin\beta)^2}{P_1+P_2}$$

此 $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{N}$ 为凸坎及地面对棱柱的反力。因此棱柱对凸坎的压力为 $\boldsymbol{F}'=-\boldsymbol{F}$；棱柱对地面的压力为 $\boldsymbol{N}'=-\boldsymbol{N}$。

为求绳子张力 S，需将(e)代入(b)或(c)。于是

$$S=P_2\sin\beta+\frac{P_2}{g}a=\frac{P_1P_2(\sin\alpha+\sin\beta)}{P_1+P_2}$$

第二节　动力学普遍方程

动力学普遍方程亦称达朗伯—拉格朗日原理，它是分析动力学的基础，由它可推导出完整约束系统的第二类拉格朗日方程，也可推导出一阶线性非完整约束系统的运动方程。同时，它对于解约束较多的系统动力学问题也很方便。

1．动力学普遍方程的推导

给定由N个质点组成的系统，它具有任意的双面约束。根据达朗伯原理，由直接加在质点上的主动力$\boldsymbol{F}_i(i=1,2,\cdots,N)$，约束反力$\boldsymbol{R}_i$以及假想的惯性力$\boldsymbol{\Phi}_i$所组成的力系，在每一瞬时，亦即在系统运动的每一位置，满足平衡条件。即

$$[\boldsymbol{F}_i,\ \boldsymbol{R}_i,\ \boldsymbol{\Phi}_i]\backsim 0 \qquad (3\text{-}6)$$

对于满足平衡条件的力系可以应用由虚位移原理所表示的平衡条件。由于达朗伯原理与虚位移原理联合，便可应用于运动的系统，即在任一瞬时，加于系统质点上的所有主动力、约束力以及惯性力在系统于该瞬时所处位置的任何虚位移上的元功之和等于零。它可表示为方程

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{\phi}_i+\boldsymbol{R}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \qquad (3\text{-}7)$$

鉴于平衡的假想性，约束可以是不稳定的。

若将惯性力的表达式$\boldsymbol{\Phi}_i=-m_i\boldsymbol{a}_i$代入，上式可表示为

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \qquad (3\text{-}8)$$

或者，因$\boldsymbol{a}_i=\ddot{\boldsymbol{r}}_i$，有

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{3-9}$$

最后，当把上述矢量的点积用在固定直角坐标系三轴上的投影来表示时，则可表示为解析的形式，即

$$\sum_{i=1}^{N}\{(-m_i\ddot{x}_i+F_{ix}+R_{ix})\delta x_i+(-m_i\ddot{y}_i+F_{iy}+R_{iy})\delta y_i+(-m_i\ddot{z}_i+F_{iz}+R_{iz})\delta z_i\}=0 \tag{3-10}$$

现在我们假设，加于系统上的约束是理想的，即约束反力在系统运动过程中所取位置的任何虚位移上的元功之和等于零，亦即

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

在这种情况下，(3-7)、(3-8)、(3-9)及(3-10)有下面的形式：

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{\phi}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{3-11}$$

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{F}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{3-12}$$

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{3-13}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\{(-m_i\ddot{x}_i+F_{ix})\delta x_i+(-m_i\ddot{y}_i+F_{iy})\delta y_i+(-m_i\ddot{z}_i+F_{iz})\delta z_i\}=0 \tag{3-14}$$

(3-13)亦即(3-14)，通称为动力学普遍方程：具有理想约束的质点系运动的任一瞬时，作用于质点系的主动力和质点系的惯性力，在质点系该瞬时所在位置的任何虚位移上，所作元功之和应等于零。

2. 例题

例1. 一圆形水平平台可绕通过其重心O的铅垂轴OZ

无摩擦地转动。一重为Q的人B，在平台上沿以O为中心、半径为r的圆周、相对平台以切向加速度$a_r^\tau=b$（b为常数）而运动。将平台当作重为P半径为R的均匀圆盘，试确定平台的角加速度ε（图 3-3）。

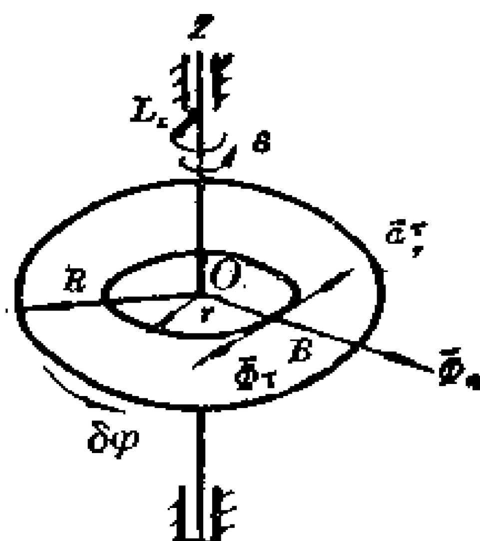


图 3-3

解： 我们应用达朗伯—拉格朗日原理。平台相对于转动轴OZ的惯性力的主矩为$L_Z=J_Z\varepsilon$，其中J_Z为平台对于轴OZ的转动惯量。人的运动由相对于平台的运动和随平台一起的运动复合而成。人在绝对运动中的切向加速度为$b+\varepsilon r$，切向惯性力为$\Phi_\tau=\frac{Q}{g}(b+\varepsilon r)$。在图 3-3 中指出了人的切向惯性力$\Phi_\tau$和法向惯性力$\Phi_n^*$。我们给系统一个虚位移——平台和人绕轴$OZ$的转动角$\delta\phi$，方向如图 3-3 所示。在此虚位移上作功的力只有平台的惯性力矩和人的切向惯性力，即

$$-L_Z\delta\phi-\Phi_\tau r\delta\phi=0$$

或

$$J_Z\varepsilon+\frac{Q}{g}(b+\varepsilon r)r=0$$

因此

$$\varepsilon=-\frac{Qbr}{J_Zg+Qr^2}=-\frac{2Qbr}{PR^2+2Qr^2}$$

---

* 法向惯性力包括哥氏力和一部分牵连惯性力。

这里的负号表明，角加速度 ε 的方向与假设的方向相反。

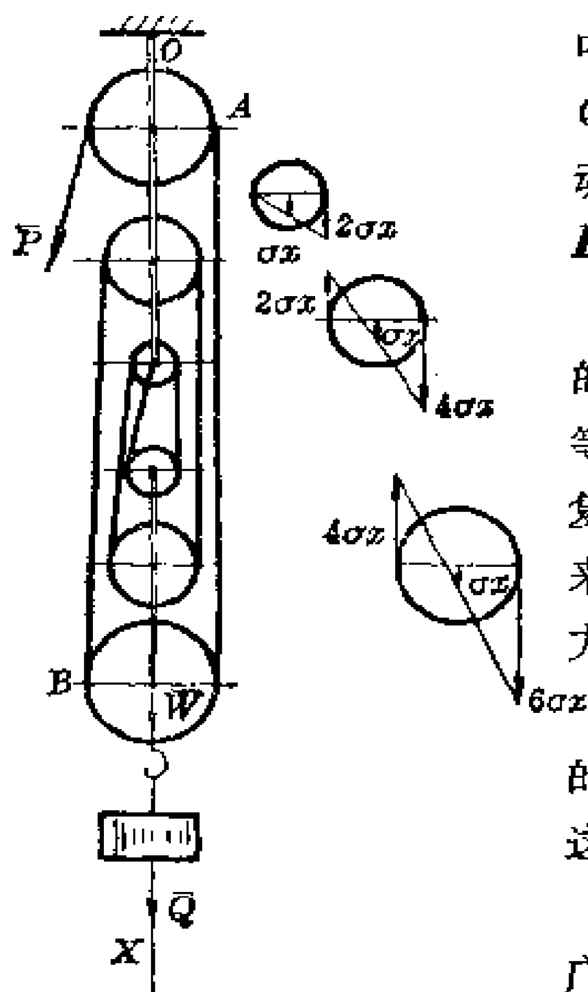


图 3-4

例2. 图 3-4 所示的滑轮组中，各绳均铅直，滑轮上挂重物 Q，不计绳子和滑轮间的摩擦，动滑轮组重 W。若在 A 端加拉力 $\boldsymbol{P}$，求重物 Q 的加速度。

解： 本题的约束力是很多的，如绳子张力、各轮轴的反力等。若用达朗伯原理求解，将是复杂的。但是用动力学普遍方程来解，就可以不考虑这些约束力，解起来就简便多了。

取整个滑轮组为系统，系统的外约束力只有 O 处的反力，但这反力不作功。

系统有一个自由度，取 x 为广义坐标。作用于系统上的主动力有 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{W}$ 及惯性力 $-\dfrac{Q+W}{g}\ddot{x}$。

如果给系统一个任意的虚位移 δx，则力 $\boldsymbol{P}$ 作用点的位移为 $6\delta x$，方向与 $\boldsymbol{P}$ 的方向相反（图 3-4）。由动力学普遍方程有

$$-\frac{Q+W}{g}\ddot{x}\delta x-P\cdot 6\delta x+(Q+W)\cdot\delta x=0$$

所以

$$-\frac{Q+W}{g}\ddot{x}-6P+Q+W=0$$

因此，系统的加速度为

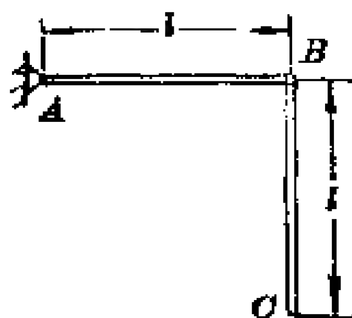
$$\ddot{x}=-\frac{(6P-Q-W)}{Q+W}g$$

若$P\geqslant\frac{Q+W}{6}$，才能起动重物Q；若$P<\frac{Q+W}{6}$，则不能起动重物Q。

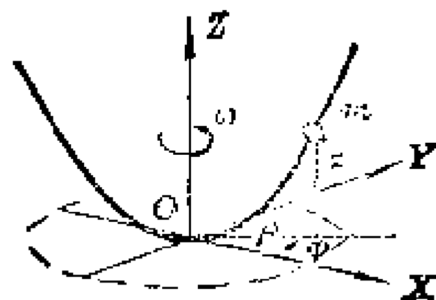
第三章　习　　题

3-1　两均质杆各重P，在图示位置从静止开始释放，求此瞬时A处的反力，已知系统在铅垂面内。

答：$X_A=0$，　$Y_A=\frac{5}{16}P$



题 3-1 图



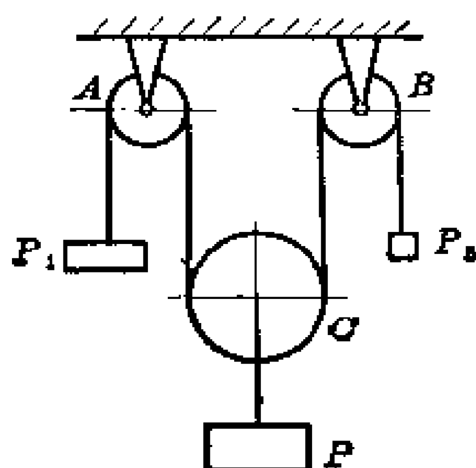
题 3-2 图

3-2　质量为m的小球串在光滑的铁丝上。铁丝的形状是一抛物线，在$O\rho Z$平面中的方程为$\rho^2=2az$。铁丝以匀角速ω绕铅垂轴OZ转动，试用动力学普遍方程列出质点的运动微分方程。

答：$(\omega^2+\rho^2)\ddot{\rho}+\rho\dot{\rho}^2+a\rho(g-a\omega^2)=0$

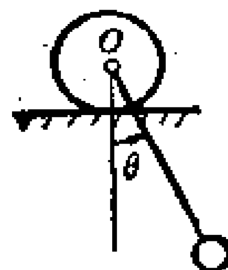
3-3　如图，已知 $P_1=20\text{N}$，$P_2=30\text{N}$，$P=40\text{N}$，滑轮与绳重及轴上摩擦均不计。试求三个重物的加速度。

答：$a=\frac{1}{11}g(\uparrow)$，　$a_1=\frac{1}{11}g(\uparrow)$，　$a_2=\frac{3}{11}g(\downarrow)$



题 3-3 图

3-4　一重 P_1 的单摆，其支点固定在一圆轮的中心 O。圆轮重 P_2，放在水平面上，圆轮与平面间有足够的摩擦力阻止滑动。设圆轮可以看作匀质圆盘。求在图示位置无初速地开始运动时轮心 O 的加速度。



题 3-4 图

答：$a=\dfrac{P_1\sin 2\theta}{3P_2+2P_1\sin^2\theta}g$。

3-5　一重 P_1 的斜面置于光滑水平面上，在斜面上，放一半径为 r，重为 P_2 的匀质圆柱如图示。圆柱只能在斜面上滚动，不计滚动阻力。求圆柱中心相对于斜面的加速度，以及斜面运动的加速度。



题 3-5 图

答：$a_r=\dfrac{2(P_1+P_2)\sin\alpha}{3(P_1+P_2)-2P_2\cos^2\alpha}g$，

$$a=\frac{P_2\sin 2\alpha}{3(P_1+P_2)-2P_2\cos^2\alpha}g。$$

第四章　拉格朗日方程

拉格朗日方程通常是指第二类拉格朗日方程，它是完整约束系统分析力学的基础，具有广泛的应用价值。

第一节　拉格朗日方程的推导

把动力学普遍方程化成广义坐标的形式，即得到所谓第二类拉格朗日方程。

1.　将动力学普遍方程变换为广义坐标形式的方程

我们假设所研究的力学系统具有双面的理想的完整约束。设此系统的自由度数目为n。这就意味着可以找到n个广义坐标$q_1, q_2, \cdots, q_n$，以确定系统的几何位形，即确定系统在空间的位置。换言之，确定系统在某直角坐标系中位置的质点的直角坐标可用广义坐标来表达。系统中质点的数目记作N。对系统的约束不加其它限制；我们认为加在系统上的约束是不稳定的，即约束方程表达式明显地包含时间t。这时，在直角坐标用广义坐标表示的表达式中明显地包含时间t。因此，有

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \cdots, q_n, t) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \cdots, q_n, t) \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \cdots, q_n, t) \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}1)$$

$$(i = 1, 2, \cdots, N)$$

同理，每个质点的矢径 $\boldsymbol{r}_i(i=1,2,\cdots,N)$ 也可表为 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 及 t 的函数

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1,q,\cdots,q_n,t) \quad (i=1,2,\cdots,N) \tag{4-2}$$

根据动力学普遍方程

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{4-3}$$

其中，我们将质点的虚位移，即矢量 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 用广义坐标表示。为此，求(4-2)的全微分。因虚位移是当 t 固定时的假想位移，那么

$$\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\delta q_s \tag{4-4}$$

必须注意，对指标 i 的求和是对系统的所有质点，即从 1 到 N；而对指标 s 的求和是对广义坐标数目进行的，即从 1 到 n。将(4-4)代入(4-3)，并改变求和顺序，方程(4-3)变为

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{N}\left(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\right)+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\right\}\delta q_s=0 \tag{4-5}$$

利用恒等式

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}=\frac{d}{dt}\left(\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\right)-\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \tag{4-6}$$

然后要利用两个特殊关系，这两个关系称为经典拉格朗日关系，它们对完整力学系统才是可能的。为得到这些关系，我们首先建立由(4-2)表示的矢径 $\boldsymbol{r}_i$ 对时间 t 的导数，即点的速度矢量表达式：

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i=\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_2}\dot{q}_2+\cdots+\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_n}\dot{q}_n+\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t} \tag{4-7}$$

将等式(4-7)的两边对广义速度 $\dot{q}_s$ 求偏导数，这时，有

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_s}=\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \tag{4-8}$$

方程(4-8)即第一个经典拉格朗日关系。为得到另一个关系，我们求等式(4-7)对 q_s 的偏导数。在(4-7)中的右边部分广义速度前的系数，即矢量函数 $\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_1}$，…，$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_n}$，依赖于变量 q_s 及 t。当对某个 q_s 求导时，将出现二阶偏导数。这样，

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_1 \partial q_s}\dot{q}_1+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_2 \partial q_s}\dot{q}_2+\cdots+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_n \partial q_s}\dot{q}_n+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial t \partial q_s} \tag{4-9}$$

另一方面，我们建立函数 $\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}$ 对时间的全导数，而 $\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}$ 明显地依赖于所有广义坐标及时间 t。我们有

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s \partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s \partial q_2}\dot{q}_2+\cdots+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s \partial q_n}\dot{q}_n+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s \partial t} \tag{4-10}$$

比较(4-9)与(4-10)，可以看出它们的右边是同样的，因为对两个变量的二阶偏导数不依赖于对这些变量求导的顺序。于是我们求得第二个经典拉格朗日关系：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}=\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s} \tag{4-11}$$

将(4-8)及(4-11)代入(4-6)，我们得到

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}=\frac{d}{dt}\left(\dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_s}\right)-\dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s} \tag{4-12}$$

将(4-12)代入(4-5)的第一个和式，这时

$$\sum_{i=1}^{N}\left(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\right)=-\left(\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_s}\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s}\right)\tag{4-13}$$

我们继续变换等式(4-13)的右边部分。为此，研究系统动能表达式

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_iv_i^2$$

或者，因矢量的标方等于其模的平方，且 $\boldsymbol{v}_i=\dot{\boldsymbol{r}}_i$，那么

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(m_i\boldsymbol{v}_i^2)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i)^2\tag{4-14}$$

于是有

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_s}\tag{4-15}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s}\tag{4-16}$$

将关系(4-15)、(4-16)代入(4-13)，便得

$$\sum_{i=1}^{N}\left(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\right)=-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\tag{4-17}$$

方程(4-5)的第二个和式 $\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}$ 乃是广义力 Q_s，即

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_i}=Q_s\tag{4-18}$$

因此，方程(4-5)取形

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)+Q_s\right\}\cdot\delta q_s=0 \qquad (4\text{-}19)$$

方程(4-19)就是广义坐标形式的动力学普遍方程。我们注意到系统中所有惯性力在系统虚位移上的元功之和为

$$-\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\delta q_s \qquad (4\text{-}20)$$

2. 第二类拉格朗日方程的推导

对于完整约束系统来说，独立坐标数目等于坐标的独立变分数目，因此广义坐标下的动力学普遍方程(4-19)中的$\delta q_1, \delta q_2, \cdots, \delta q_n$是彼此独立的，或者说是任意的。于是可选取它们的值使一个坐标变分异于零而其余坐标变分为零，这样可得n个方程

$$-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)+Q_s=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n)$$

或者写成

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (4\text{-}21)$$

方程(4-21)称为第二类拉格朗日方程。这方程不仅是分析力学及其应用的发展基础，而且也是理论物理中的其它学科发展的基础。第二类拉格朗日方程是对具有双面、理想、完整约束的力学系统建立的方程，它们是完整系统分析力学的基础。

第二节　拉格朗日方程的结构

拉格朗日方程(4-21)实质上是建立系统以广义坐标表示

运动的动力学微分方程的法则。如果完成方程(4-21)中所指出的对动能全部运算以及按照问题的条件计算出广义力的表达式，那么就可写出运动方程。因此方程的最终形式决定于系统动能对广义坐标及广义速度的依赖关系，决定于作用于系统的主动力。

1. 系统动能的结构

(1) 系统动能表为广义速度的齐二次式、齐一次式及不含广义速度的项（广义速度的零次式）

为建立第二类拉格朗日方程，就必须知道系统动能的表达式，并将其表为广义坐标 q_s、广义速度 $\dot{q}_s$ 及时间 t 的函数。现在我们来建立这样的表达式。

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i \tag{4-22}$$

因点的矢径 $\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1,q_2,\cdots,q_n,t)$，故点的速度矢量为

$$\boldsymbol{v}_i=\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \tag{4-23}$$

将(4-23)代入(4-22)，得

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\dot{q}_k\dot{q}_s\sum_{i=1}^{N} m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right.\\&\qquad\left.+2\sum_{s=1}^{n}\dot{q}_s\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}+\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)^2\right\}\end{aligned} \tag{4-24}$$

为简化写法，我们引入记号

$$
\left.\begin{aligned}
A_{sk}=A_{ks}&=\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\\
&=\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+\frac{\partial y_i}{\partial q_s}\frac{\partial y_i}{\partial q_k}+\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)\\
B_s&=\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\\
&=\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\frac{\partial x_i}{\partial t}+\frac{\partial y_i}{\partial q_s}\frac{\partial y_i}{\partial t}+\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)\\
T_0&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)^2\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)^2\right]
\end{aligned}\right\}
\tag{4-25}
$$

将(4-25)代入(4-24)，得

$$T=T_2+T_1+T_0 \tag{4-26}$$

其中

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{sk}\dot{q}_s\dot{q}_k \tag{4-27}$$

$$T_1=\sum_{s=1}^{n} B_s\dot{q}_s \tag{4-28}$$

于是系统动能分为三部分：广义速度的齐二次式 T_2，广义速度的齐一次式 T_1，以及不依赖于广义速度的项 T_0。

我们把力学系统按稳定的和不稳定的特征来分类，这种分类对以后的全部研究具有重要意义。

首先，如果加于系统上的约束是不稳定的，则直角坐标用广义坐标表示的公式明显地包含时间 t（哪怕仅对一个坐标）。这时，公式(4-25)中的系数表达式 A_{sk}，B_s，T_0 明显地依赖于时间 t，则动能 T 也明显地包含时间 t。我们称这

样情形的力学系统为完全不稳定系统，因为在直角坐标中以及广义坐标中都是不稳定的。动能表达式包含全部三项 T_2、T_1 及 T_0。

其次，如果在直角坐标中是不稳定的，而在广义坐标中不明显依赖于时间 t。这样的系统可称为半不稳定系统，或者在广义坐标中的稳定系统。这时，在动能表达式中有全部三项 T_2、T_1 及 T_0。

最后，如果在直角坐标中是稳定的，且在过渡到广义坐标的公式中时间 t 明显不出现，那么系统称为完全稳定的或者稳定的系统。在此情形中，$B_S=T_0=0$，动能 T 的表达式中仅包含广义速度 $\dot{q}_S$ 的齐二次式 T_2。

因此，动能 T 表达式有如下形式：

不稳定系统　　$T=T_2+T_1+T_0$（T 明显依赖于 t）

半不稳定系统　$T=T_2+T_1+T_0$
（T 不明显依赖于 t）

完全稳定系统　$T=T_2$（T 不明显依赖于 t）

(2) 动能的各种表达式

我们回忆一下理论力学中讲过的动能的计算，以便于将来的具体应用。

一、质点和质点系的动能

质点的动能为

$$T=\frac{1}{2}mv^2 \tag{4-29}$$

其中 m 为点的质量，v 为点的速度。

质点系的动能为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_iv_i^2 \tag{4-30}$$

其中 m_i 为第 i 个质点的质量，v_i 为它的速度。

二、质点系在复合运动中的动能

我们将力学系统的运动分解为随系统质心 C 的平动以及相对于同质心一起平动的动坐标系的转动，则系统中点的绝对速度 $\boldsymbol{v}_i$ 等于质心的速度 $\boldsymbol{v}_c$ 加上点相对于质心的速度 $\boldsymbol{v}_{ir}$，即

$$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_c+\boldsymbol{v}_{ir}$$

于是系统的动能

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i(\boldsymbol{v}_i)^2\\&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_c)^2\sum_{i=1}^{N}m_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i(\boldsymbol{v}_{ir})^2+\boldsymbol{v}_c\cdot\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{v}_{ir}\end{aligned}$$

但

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{v}_{ir}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}_i'\right)$$

其中 $\boldsymbol{r}_i'$ 为质点在动系中相对质心 C 的矢径，据质心的定义，有 $\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}_i'=0$，因此

$$T=\frac{1}{2}Mv_c^2+T_c^{(r)} \tag{4-31}$$

其中　$M=\sum_{i=1}^{N}m_i$ 为系统的总质量

$T_c^{(r)}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_iv_{ir}^2$（为系统相对质心的动能）

公式(4-31)称为柯尼希(König)定理：质点系在绝对运动中的动能等于质心的动能（集中全部质量）加上系统相对于质心的动能。

三、刚体运动的动能

（一） 刚体平动的动能

$$T=\frac{1}{2}Mv^2 \tag{4-32}$$

其中M为刚体的总质量，V为刚体平动的速度。

（二） 刚体定轴转动的动能

$$T=\frac{1}{2}J_Z\omega^2 \tag{4-33}$$

其中 J_Z 为刚体对转动轴的转动惯量，ω 为刚体转动的角速度。

（三） 刚体平面运动的动能

$$T=\frac{1}{2}Mv_c^2+\frac{1}{2}J_{cZ}\omega^2 \tag{4-34}$$

其中 M——刚体的总质量；v_c——刚体质心的速度；
J_{cZ}——刚体对过质心C并垂直于其对称平面的轴的转动惯量；ω——刚体平面运动的角速度。

（四） 刚体定点运动的动能

$$T=\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2-2Dqr-2Erp-2Fpq) \tag{4-35}$$

其中 A，B，C 分别表示刚体对与其固联的坐标轴的转动惯量；D，E，F为与这些坐标轴相应的惯性积；p，q，r 为刚体角速度在这些轴上的投影。下面我们来推导公式(4-35)。

因为绕定点转动的刚体，在每一瞬时的运动等于绕某一瞬时转动轴的运动，角速度矢量 ω 在此轴上，令 ω 在与刚体固联的轴上的投影为 p，q，r，它们与欧拉(Euler)角的关系（图 4-1）为

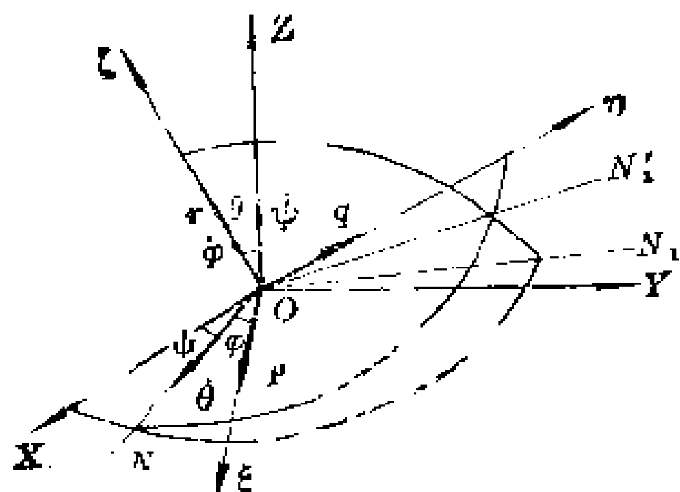


图 4-1

$$
\left.\begin{aligned}
p &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \\
q &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi \\
r &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}
\end{aligned}\right\} \tag{4-36}
$$

刚体内质量为 m_i 的点 M_i 的速度为

$$
\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \overline{OM_i} = (qz_i - ry_i)\boldsymbol{i} + (rx_i - pz_i)\boldsymbol{j} + (py_i - qx_i)\boldsymbol{k}
$$

其中 x_i, y_i, z_i 为点 M_i 在与刚体相固联的轴系 $OX_1Y_1Z_1$ 中的坐标；$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 为这些轴向的单位矢量。因此刚体的动能为

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\Sigma m_i [(qz_i - ry_i)^2 \\
&\quad + (rx_i - pz_i)^2 + (py_i - qx_i)^2] \\
&= \frac{1}{2}\Sigma m_i \{p^2(y_i^2 + z_i^2) + q^2(z_i^2 + x_i^2) \\
&\quad + r^2(x_i^2 + y_i^2) - 2qry_iz_i - 2rpz_ix_i - 2pqx_iy_i\}
\end{aligned}
$$

其中 Σ 表示对整个刚体求和。

令

$$
\left.\begin{array}{ll}
A=\Sigma m_i(y_i^2+z_i^2), & B=\Sigma m_i(z_i^2+x_i^2) \\
C=\Sigma m_i(x_i^2+y_i^2), & D=\Sigma m_i y_i z_i \\
E=\Sigma m_i z_i x_i, & F=\Sigma m_i x_i y_i
\end{array}\right\} \qquad (4\text{-}37)
$$

于是得到(4-35)。

（五） 刚体一般运动的动能

刚体的一般运动可分解为随质心的平动以及相对质心的转动，因此动能为

$$
T=\frac{1}{2}Mv_c^2+\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2-2Dqr-2Erp-2Fpq) \qquad (4\text{-}38)
$$

（六） 刚体系统的动能

如果系统由许多刚体组成，则总动能等于各个刚体的动能之和。

注意，以上的公式(4-29)—(4-35)以及(4-38)最终还要表为广义坐标、广义速度的形式。

(3) 动能计算例题

例1. 质点在平面上运动时，以极坐标表示的动能表达式。

解： 设点的质量为m，在平面XOY上取极坐标r，θ如图4-2。将点的直角坐标(x, y)用极坐标(r,θ)表达，即

$$
x=r\cos\theta, \qquad y=r\sin\theta
$$

将(4-39)两边对时间t求导数，得

$$
\left.\begin{array}{l}
\dot{x}=\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta \\
\dot{y}=\dot{r}\sin\theta+r\dot{\theta}\cos\theta
\end{array}\right\} \qquad (4\text{-}40)
$$

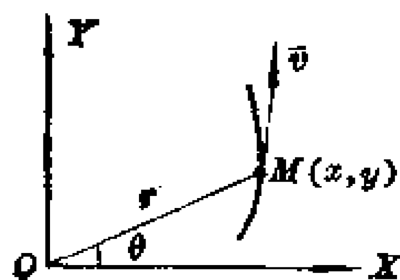


图 4-2

所以

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=(\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta)^2+(\dot{r}\sin\theta+r\dot{\theta}\cos\theta)^2$$
$$=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2$$

于是点的动能

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2) \tag{4-41}$$

例2. 质点以球面坐标表示的动能表达式。

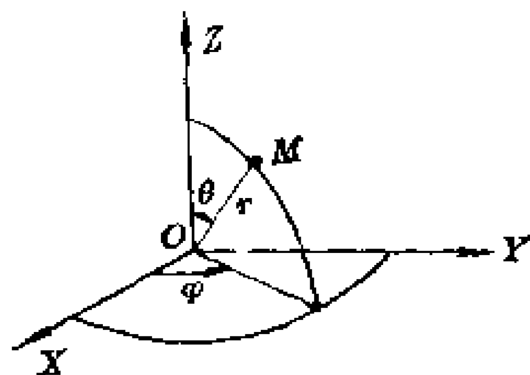


图 4-3

解：设点的质量为m，取球坐标（r，φ，θ）如图4-3，其中r为固定点O至点M的距离，φ为经度，θ为纬度的余角。将点M的直角坐标x，y，z用球坐标r，φ，θ表示，即

$$\left.\begin{aligned}x&=r\sin\theta\cos\varphi\\y&=r\sin\theta\sin\varphi\\z&=r\cos\theta\end{aligned}\right\} \tag{4-42}$$

将(4-42)两边对t求导数，得

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=\dot{r}\sin\theta\cos\varphi+r\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi-r\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi\\\dot{y}&=\dot{r}\sin\theta\sin\varphi+r\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi+r\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi\\\dot{z}&=\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta\end{aligned}\right\} \tag{4-43}$$

因此

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta$$

质点的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) \tag{4-44}$$

例3. 质量为m的质点无摩擦地在一平面Π上运动，平

面Π通过一固定直线（它与铅垂线夹角为常值α）且以等角速度ω绕此线OZ转动（图 4-4），求质点的动能。

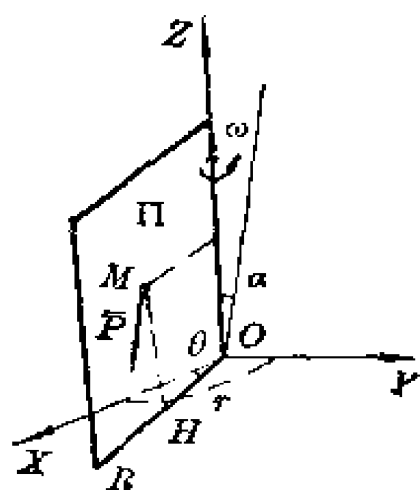


图 4-4

解：取固定直角坐标系$OXYZ$使轴OZ为固定直线，平面YOZ为铅垂，轴OX为水平。在平面Π与平面XOY交线上取一正的指向OR。取OR与OX夹角为θ，令$t=0$时$\theta=0$，于是$\theta=\omega t$。平面Π的方程为

$$\frac{y}{x}=\mathrm{tg}\,\omega t \tag{4-45}$$

质点M的坐标必须满足约束方程(4-45)，可见约束是不稳定的。由于有约束(4-45)，而质点有两个自由度。由点M平行于轴OZ投影于平面XOY上得点H，记作$\overline{OH}=r$。因此知道了r及z即可确定点M的位置。

今将点的直角坐标x，y，z用r，z表示，即

$$\left.\begin{aligned}x&=r\cos\theta=r\cos\omega t\\y&=r\sin\theta=r\sin\omega t\\z&=z\end{aligned}\right\} \tag{4-46}$$

于是有

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=\dot{r}\cos\omega t-r\omega\sin\omega t\\\dot{y}&=\dot{r}\sin\omega t+r\omega\cos\omega t\\\dot{z}&=\dot{z}\end{aligned}\right\} \tag{4-47}$$

因此

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=\dot{r}^2+r^2\omega^2+\dot{z}^2 \tag{4-48}$$

可见表达式(4-48)不是广义速度$\dot{r}$，$\dot{z}$的齐二次式，因为约

束是不稳定的。但动能表达式中不明显地依赖时间 t，如前所述，这系统可称为半不稳定系统或广义坐标下的稳定系统。

例4. 一系统由两个长为 l_1 及 l_2 的均匀杆组成，长 l_1 的杆之一端固定，另一端与第二个杆铰接（图 4-5），两杆

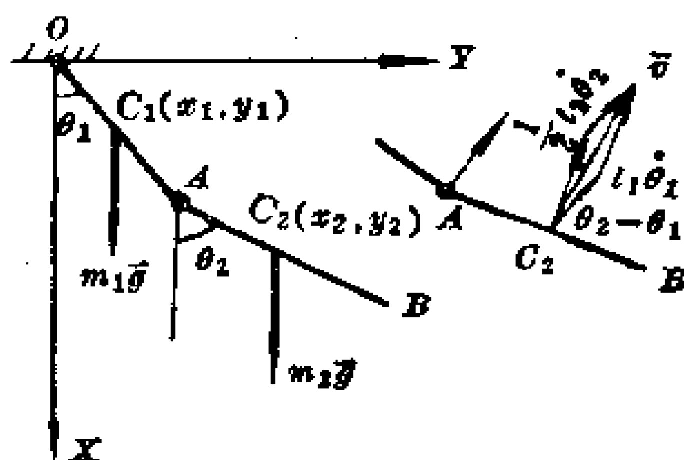


图 4-5

质量为 m_1，m_2。试求系统在铅垂平面内运动时的动能。

解：此系统由两个刚体组成，长为 l_1 的杆作定轴转动，长为 l_2 的杆作平面运动。系统有两个自由度，取两杆与铅垂线夹角 θ_1，θ_2 为广义坐标。两杆质心的坐标为(x_1, y_1)及(x_2, y_2)，两杆的动能分别为

$$\left.\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}_1^2, \\ T'' &= \frac{1}{2} m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} J_{c_2} \dot{\theta}_2^2 \end{aligned}\right\} \tag{4-49}$$

其中

$$J_0 = \frac{1}{12} m_1 l_1^2 + m_1 \left(\frac{l_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m_1 l_1^2$$

$$J_{C_2}=\frac{1}{12}m_2 l_2^2$$

为应用拉格朗日方程求解运动，需将(4-49)表为广义坐标、广义速度的形式。因

$$\left.\begin{aligned} x_2&=l_1\cos\theta_1+\frac{l_2}{2}\cos\theta_2 \\ y_2&=l_1\sin\theta_1+\frac{l_2}{2}\sin\theta_2 \end{aligned}\right\} \tag{4-50}$$

将(4-50)求对 t 的导数，得

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_2&=-l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1-\frac{l_2}{2}\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \\ \dot{y}_2&=l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1+\frac{l_2}{2}\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \end{aligned}\right\} \tag{4-51}$$

因此

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=l_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{l_2^2}{4}\dot{\theta}_2^2+l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1) \tag{4-52}$$

我们注意到为求得(4-52)，也可用几何法直接得到。第二杆质心 C_2 的速度等于 A 的速度 $l_1\dot{\theta}_1$ 加上 C_2 相对于 A 的速度 $\frac{l_2}{2}\dot{\theta}_2$，两速度夹角为 $\theta_2-\theta_1$（图 4-5）。按余弦定理，求得

$$v_{c_2}^2=(l_1\dot{\theta}_1)^2+\left(\frac{l_2}{2}\dot{\theta}_2\right)^2+2l_1\dot{\theta}_1\cdot\frac{l_2}{2}\dot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1)$$

将(4-52)及转动惯量表达式代入(4-49)，得

$$T'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2$$

$$T''=\frac{1}{2}m_2\left[l_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{4}l_2^2\dot{\theta}_2^2+l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}m_2 l_2^2\dot{\theta}_2^2$$

于是系统的动能为

$$T=T'+T''$$

$$=\frac{1}{2}\Big\{\Big(\frac{1}{3}m_1+m_2\Big)l_1^2\dot{\theta}_1^2$$

$$+\frac{1}{3}m_2 l_2^2\dot{\theta}_2^2+m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1)\Big\} \qquad (4\text{-}53)$$

2. 广义力的计算

广义力的计算可按其定义(2-8)，即

$$Q_s=\sum_{i=1}^{N}\Big(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\Big) \qquad (4\text{-}54)$$

但这样做，往往并不方便。

为计算广义力，常用求虚功的方法。因广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 是彼此独立的，故可取一组特殊的虚位移，只令 $\delta q_k\neq 0$，而其余 $\delta q_s=0(s\neq k)$，这时虚功为

$$\delta A=\delta A_k=Q_k\delta q_k$$

于是可求广义力

$$Q_k=\frac{\delta A}{\delta q_k} \qquad (4\text{-}55)$$

下面举例说明。

例5. 求本节例3中的广义力。

解： 我们先按定义(4-54)计算广义力。将力 $\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{g}$ 投影到固定轴 OX, OY，及 OZ 上，有

$$\left.\begin{aligned}F_x&=0\\F_y&=-mg\sin\alpha\\F_z&=-mg\cos\alpha\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}56)$$

由(4-46)得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\omega t\ ,\quad \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\omega t\ ,\quad \frac{\partial z}{\partial r}=0\\&\frac{\partial x}{\partial z}=0\quad\ ,\quad \frac{\partial y}{\partial z}=0\quad ,\quad \frac{\partial z}{\partial z}=1\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}57)$$

利用广义力的定义(4-54)及(4-56)、(4-57)，得

$$\left.\begin{aligned}&Q_r=F_x\frac{\partial x}{\partial r}+F_y\frac{\partial y}{\partial r}+F_z\frac{\partial z}{\partial r}=-mg\sin\alpha\sin\omega t\\&Q_z=F_x\frac{\partial x}{\partial z}+F_y\frac{\partial y}{\partial z}+F_z\frac{\partial z}{\partial z}=-mg\cos\alpha\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}58)$$

其次，我们用求虚功的方法来求广义力。

假设给质点一虚位移 δz，则力 $\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{g}$ 的虚功为

$$\delta A_z=-mg\cos\alpha\cdot\delta z$$

故

$$Q_z=\frac{\delta A_z}{\delta z}=-mg\cos\alpha$$

假设给质点一虚位移 δr，则力 $\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{g}$ 的虚功为

$$\delta A_r=-mg\sin\alpha\sin\omega t\,\delta r$$

故

$$Q_r=\frac{\delta A_r}{\delta r}=-mg\sin\alpha\sin\omega t$$

例6. 求本节例 4 中的广义力

解：首先，按定义(4-54)来求广义力。力 $\boldsymbol{P}_1=m_1\boldsymbol{g}$ 及力 $\boldsymbol{P}_2=m_2\boldsymbol{g}$ 在固定轴上投影为

$$\left.\begin{aligned}&F_{1x}=m_1g,\qquad F_{2x}=m_2g\\&F_{1y}=0\quad ,\qquad F_{2y}=0\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}59)$$

注意到

$$x_1=\frac{l_1}{2}\cos\theta_1\ ,\qquad y_1=\frac{l_1}{2}\sin\theta_1$$

及表达式(4-50)，得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x_1}{\partial\theta_1}=-\frac{l_1}{2}\sin\theta_1, && \frac{\partial y_1}{\partial\theta_1}=\frac{l_1}{2}\cos\theta_1\\
&\frac{\partial x_1}{\partial\theta_2}=0, && \frac{\partial y_1}{\partial\theta_2}=0\\
&\frac{\partial x_2}{\partial\theta_1}=-l_1\sin\theta_1\ , && \frac{\partial y_2}{\partial\theta_1}=l_1\cos\theta_1\\
&\frac{\partial x_2}{\partial\theta_2}=-\frac{l_2}{2}\sin\theta_2, && \frac{\partial y_2}{\partial\theta_2}=\frac{l_2}{2}\cos\theta_2
\end{aligned}\right\}\tag{4-60}$$

将(4-59)及(4-60)代入(4-54)，便得

$$\left.\begin{aligned}
Q_1&=F_{1x}\frac{\partial x_1}{\partial\theta_1}+F_{1y}\frac{\partial y_1}{\partial\theta_1}+F_{2x}\frac{\partial x_2}{\partial\theta_1}+F_{2y}\frac{\partial y_2}{\partial\theta_1}\\
&=-m_1g\frac{l_1}{2}\sin\theta_1-m_2gl_1\sin\theta_1\\
&=-\left(\frac{m_1}{2}+m_2\right)gl_1\sin\theta_1\\
Q_2&=F_{1x}\frac{\partial x_1}{\partial\theta_2}+F_{1y}\frac{\partial y_1}{\partial\theta_2}+F_{2x}\frac{\partial x_2}{\partial\theta_2}+F_{2y}\frac{\partial y_2}{\partial\theta_2}\\
&=-m_2g\frac{l_2}{2}\sin\theta_2
\end{aligned}\right\}\tag{4-61}$$

其次，用求虚功的方法计算广义力 Q_1、Q_2。

今给一虚位移 $\delta\theta_2\neq0$，$\delta\theta_1=0$，则力 $\boldsymbol{P}_1$ 不作虚功，仅力 $\boldsymbol{P}_2$ 作虚功

$$\delta A_2=-m_2g\frac{l_2}{2}\sin\theta_2\delta\theta_2$$

所以

$$Q_2=\frac{\delta A_2}{\delta\theta_2}=-m_2g\frac{l_2}{2}\sin\theta_2$$

今给一虚位移 $\delta\theta_1 \neq 0$，$\delta\theta_2 = 0$，则 $\boldsymbol{P}_1$ 的作用点铅垂上升 $\frac{l_1}{2}\sin\theta_1\delta\theta_1$，$\boldsymbol{P}_2$ 的作用点铅垂上升 $l_1\sin\theta_1\delta\theta_1$，故虚功为

$$\delta A_1 = -m_1 g \frac{l_1}{2}\sin\theta_1\delta\theta_1 - m_2 g l_1 \sin\theta_1\delta\theta_1$$

$$= -\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) g l_1 \sin\theta_1 \cdot \delta\theta_1$$

于是广义力为

$$Q_1 = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) g l_1 \sin\theta_1$$

3. 拉格朗日方程的显式

我们将第二类拉格朗日方程写成显式，这对于以后的某些研究是方便的。

为书写简便，我们引入欧拉算子

$$\varepsilon_s = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial}{\partial q_s} \tag{4-62}$$

于是第二类拉格朗日方程(4-21)成为

$$\varepsilon_s(T) = Q_s \tag{4-63}$$

故由(4-26)，

$$\varepsilon_s(T) = \varepsilon_s(T_2) + \varepsilon_s(T_1) + \varepsilon_s(T_0) \tag{4-64}$$

为得到方程的显式，我们分别计算 $\varepsilon_s(T_2)$、$\varepsilon_s(T_1)$ 及 $\varepsilon_s(T_0)$。

由(4-27)，我们有

$$\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_s} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} A_{ks}\dot{q}_k + \sum_{m=1}^{n} A_{sm}\dot{q}_m\right) = \sum_{k=1}^{n} A_{ks}\dot{q}_k$$

这是因为 $A_{ks} = A_{sk}$。因此，

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_s}=\sum_{k=1}^{n} A_{ks}\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial q_m}\dot{q}_m\dot{q}_k$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\cdot\dot{q}_k$$

而

$$\frac{\partial T_2}{\partial q_s}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial A_{km}}{\partial q_S}\dot{q}_k\dot{q}_m$$

故

$$\varepsilon_S(T_2)=\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial}{\partial q_S}\right)\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}A_{km}\dot{q}_k\dot{q}_m$$
$$=\sum_{k=1}^{n}A_{ks}\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial A_{ks}}{\partial q_m}-\frac{1}{2}\frac{\partial A_{km}}{\partial q_s}\right)\dot{q}_k\dot{q}_m$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\cdot\dot{q}_k \tag{4-65}$$

现将(4-65)中第二项变换，注意到

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial q_m}\dot{q}_k\dot{q}_m=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial A_{ks}}{\partial q_m}+\frac{\partial A_{ms}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k\dot{q}_m$$

这可由交换下标k、m得到。于是

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial A_{ks}}{\partial q_m}-\frac{1}{2}\frac{\partial A_{km}}{\partial q_s}\right)\dot{q}_k\dot{q}_m$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial A_{ks}}{\partial q_m}+\frac{\partial A_{ms}}{\partial q_k}-\frac{\partial A_{km}}{\partial q_s}\right)\dot{q}_k\dot{q}_m$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m \tag{4-66}$$

其中量

$$[k,m,s]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{ks}}{\partial q_m}+\frac{\partial A_{ms}}{\partial q_k}-\frac{\partial A_{km}}{\partial q_s}\right) \tag{4-67}$$

是对T的齐二次式T_2的系数矩阵的第一类克里斯朵夫

(Christoffel)记号。

因此

$$\varepsilon_s(T_2)=\sum_{k=1}^{n}A_{ks}\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{sk}}{\partial t}\dot{q}_k \tag{4-68}$$

类似地求得

$$\varepsilon_s(T_1)=\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial}{\partial q_s}\right)\sum_{k=1}^{n}B_k\dot{q}_k$$

$$=\frac{dB_s}{dt}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial B_k}{\partial q_s}\dot{q}_k$$

$$=\frac{\partial B_s}{\partial t}-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k \tag{4-69}$$

量

$$\gamma_{sk}=-\gamma_{ks}=\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k} \tag{4-70}$$

组成斜对称矩阵

$$\begin{bmatrix} 0, & \gamma_{12}, & \cdots, & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21}, & 0, & \cdots, & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1}, & \gamma_{n2}, & \cdots, & 0 \end{bmatrix} \tag{4-71}$$

γ_{sk} 称之为陀螺系数，而表达式

$$\Gamma_s=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{sk}\dot{q}_k \tag{4-72}$$

乃是广义陀螺力， 它的项 $\gamma_{sk}\dot{q}_k$ 是陀螺力。于是

$$\varepsilon_s(T_1)=\frac{\partial B_s}{\partial t}-\Gamma_s \tag{4-73}$$

将(4-68)、(4-73)代入第二类拉格朗日方程(4-63)，便

得

$$\sum_{k=1}^{n}A_{ks}\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{sk}}{\partial t}\dot{q}_k+\frac{\partial B_s}{\partial t}-\Gamma_s-\frac{\partial T_0}{\partial q_s}=Q_s$$

$$(s=1,2,\cdots,n)$$

或者

$$\sum_{k=1}^{n}A_{ks}\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m$$

$$=Q_s+\Gamma_s+\frac{\partial T_0}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial t}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{sk}}{\partial t}\dot{q}_k$$

$$(s=1,2,\cdots,n) \tag{4-74}$$

方程(4-74)就是第二类拉格朗日方程的显式，此方程的右边各项具有力的性质。

如果系统是半不稳定的，T不明显依赖于t，则(4-74)成为

$$\sum_{k=1}^{n}A_{ks}\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m$$

$$=Q_s+\Gamma_s+\frac{\partial T_0}{\partial q_s} \tag{4-75}$$

$$(s=1,2,\cdots,n)$$

如果系统是完全稳定的，即$T=T_2$，则(4-74)成为

$$\sum_{k=1}^{n}A_{ks}\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m=Q_s \tag{4-76}$$

$$(s=1,2,\cdots,n)$$

第三节　拉格朗日方程应用举例

在这一节我们举出一系列例子，用第二类拉格朗日方程

来建立运动微分方程。应用第二类拉格朗日方程解决具体问题时，大致应该遵循下列步骤：

(1) 明确系统，弄清楚所考虑的系统究竟包括哪些物体。然后确定自由度，再选一套适当的广义坐标。必须注意坐标选得好会使问题处理起来比较方便。

(2) 将动能表达成广义坐标的形式 $T=T(\dot{q}_s, q_s, t)$。

(3) 写出广义力。

(4) 将 Q_s，T 代入第二类拉格朗日方程，得到 n 个二阶常微分方程，再由 $2n$ 个初始条件解出运动 $q_s=q_s(t)$。

我们注意到，第二类拉格朗日方程适用于双面、理想、完整的力学系统，而不论稳定与否。

例1. 我们建立上节例3中M点的运动微分方程（图4-4），并求其解。

解： 取质点M为研究对象。如上节中指出的，这是一个半不稳定系统。选 r，z 为广义坐标。将点的动能表为广义坐标的形式(4-48)，即

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\omega^2+\dot{z}^2)$$

广义力为(4-58)，即

$$Q_r=-mg\sin\alpha\cdot\sin\omega t$$

$$Q_z=-mg\cos\alpha$$

按构成第二类拉格朗日方程的法则，进行如下计算：

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}}=m\dot{z}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}=m\omega^2 r, \quad \frac{\partial T}{\partial z}=0$$

于是第二类拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}-\frac{\partial T}{\partial r}=Q_r$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}-\frac{\partial T}{\partial z}=Q_z$$

成为

$$m\ddot{r}-m\omega^2 r=-mg\sin\alpha\cdot\sin\omega t$$

$$m\ddot{z}=-mg\cos\alpha$$

或

$$\ddot{r}-\omega^2 r=-g\sin\alpha\sin\omega t \tag{4-77}$$

$$\ddot{z}=-g\cos\alpha \tag{4-78}$$

我们来积分方程(4-77)、(4-78)。设初始条件为 $t=0$，$z=z_0$，$\dot{z}=\dot{z}_0$，$r=r_0$，$\dot{r}=\dot{r}_0$。

方程(4-78)容易积分，第一次积分为

$$\dot{z}=B-gt\cos\alpha \tag{4-79}$$

再积分一次，得

$$z=A+Bt-\frac{1}{2}gt^2\cos\alpha \tag{4-80}$$

其中常数 A，B 由初始条件确定。将 $t=0$，$\dot{z}=\dot{z}_0$ 代入(4-79)便得 $B=\dot{z}_0$

将 $t=0$，$z=z_0$ 代入(4-80)，得

$$A=z_0$$

因此

$$z=z_0+\dot{z}_0 t-\frac{1}{2}gt^2\cos\alpha \tag{4-81}$$

现在积分方程(4-77)，这是一个非齐次方程，易见其特解有形式：

$$r = K\sin\omega t$$

将此特解代入(4-77)，即得

$$-K\omega^2\sin\omega t - \omega^2 K\sin\omega t = -g\sin\alpha\cdot\sin\omega t$$

因此

$$K = \frac{g}{2\omega^2}\sin\alpha$$

(4-77)的齐次方程 $\ddot{r}-\omega^2 r=0$ 的通解为

$$r = A_1 e^{\omega t} + B_1 e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\sin\alpha\sin\omega t \tag{4-82}$$

对上式求导数，有

$$\dot{r} = A_1\omega e^{\omega t} - B_1\omega e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega}\sin\alpha\cos\omega t \tag{4-83}$$

将 $t=0$，$r=r_0$ 代入(4-82)，并将 $t=0$，$\dot{r}=\dot{r}_0$ 代入(4-83)，于是得

$$r_0 = A_1 + B_1$$

$$\dot{r}_0 = A_1\omega - B_1\omega + \frac{g}{2\omega}\sin\alpha$$

由此二代数方程解得

$$A_1 = \frac{r_0}{2} + \frac{\dot{r}_0}{2\omega} - \frac{g}{4\omega^2}\sin\alpha$$

$$B_1 = \frac{r_0}{2} - \frac{\dot{r}_0}{2\omega} + \frac{g}{4\omega^2}\sin\alpha$$

将此 A_1，B_1 代入(4-82)，便得

$$r = \left(\frac{r_0}{2} + \frac{\dot{r}_0}{2\omega} - \frac{g}{4\omega^2}\sin\alpha\right)e^{\omega t} + \left(\frac{r_0}{2} - \frac{\dot{r}_0}{2\omega} + \frac{g}{4\omega^2}\sin\alpha\right)e^{-\omega t}$$

$$+\frac{g}{2\omega^2}\sin\alpha\sin\omega t \tag{4-84}$$

于是，(4-81)，(4-84)及 $\theta=\omega t$ 便是点的运动方程式。

例2. 我们研究单位质量的自由质点在球坐标(r, φ, θ)中的运动，它有形如

$$U=f(r)+\frac{g(\theta)}{r^2}+\frac{h(\varphi)}{r^2\sin^2\theta} \tag{4-85}$$

的力函数，其中 f，g，h 是已知函数，这些函数是连续的且有连续的导数（这个问题称为“林埃问题”）。

解： 单位质量质点在球坐标中的动能（见4-44）为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$$

广义力是力函数对广义坐标的偏导数，由(4-85)，得

$$Q_r=\frac{\partial U}{\partial r}=f'(r)-\frac{2}{r^3}\left[g(\theta)+\frac{h(\varphi)}{\sin^2\theta}\right]$$

$$Q_\theta=\frac{\partial U}{\partial \theta}=\frac{1}{r^2}\left[g'(\theta)-\frac{2h(\varphi)\cos\theta}{\sin^3\theta}\right]$$

$$Q_\varphi=\frac{\partial U}{\partial \varphi}=\frac{h'(\varphi)}{r^2\sin^2\theta}$$

故点的第二类拉格朗日方程形如

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}-\frac{\partial T}{\partial r}=Q_r\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}-\frac{\partial T}{\partial \theta}=Q_\theta\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q_\varphi\end{aligned}\right\} \tag{4-86}$$

我们进行下列计算：

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=\dot{r}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=\ddot{r}, \qquad \frac{\partial T}{\partial r}=r(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=r^2\dot{\theta}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=r^2\ddot{\theta}+2r\dot{r}\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta}=r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=r^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=r^2\sin^2\theta\cdot\ddot{\varphi}+2r\dot{r}\dot{\varphi}\sin^2\theta+r^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin 2\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}=0$$

将广义力、上面计算的导数代入(4-86)，便得

$$\ddot{r}-r(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$$
$$=f'(r)-\frac{2}{r^3}\left[g(\theta)+\frac{h(\varphi)}{\sin^2\theta}\right] \tag{4-87}$$

$$r^2\ddot{\theta}+2r\dot{r}\dot{\theta}-r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta$$
$$=\frac{1}{r^2}\left[g'(\theta)-\frac{2h(\varphi)\cos\theta}{\sin^3\theta}\right] \tag{4-88}$$

$$r^2\ddot{\varphi}\sin^2\theta+2r\dot{r}\dot{\varphi}\sin^2\theta+r^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin 2\theta$$
$$=\frac{h'(\varphi)}{r^2\sin^2\theta} \tag{4-89}$$

方程(4-87)、(4-88)及(4-89)是可以积分出来的，积分方法如下：

方程(4-89)可变为

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta)=\frac{h'(\varphi)}{r^2\sin^2\theta}$$

或

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta]^2=h'(\varphi)\dot{\varphi}$$

或

$$d[r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta]^2=d[2h(\varphi)]$$

积分之，得

$$r^4\dot{\varphi}^2\sin^4\theta=2h(\varphi)+2C_1 \tag{4-90}$$

其中 C_1 为由初始条件确定的常数。

方程(4-88)有形

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})-r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta$$

$$=\frac{1}{r^2}\left[\ g'(\theta)-\frac{2h(\varphi)\cos\theta}{\sin^3\theta}\right] \tag{4-91}$$

将(4-90)乘以$\frac{\cos\theta}{r^2\sin^3\theta}$，得

$$r^2\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\varphi}^2$$

$$=\frac{2h(\varphi)\cos\theta}{r^2\sin^3\theta}+\frac{2C_1\cos\theta}{r^2\sin^3\theta} \tag{4-92}$$

考虑到(4-92)，方程(4-91)可变为

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})-\frac{2C_1\cos\theta}{r^2\sin^3\theta}=\frac{g'(\theta)}{r^2}$$

将此方程两边同乘以 $r^2\dot{\theta}$，得

$$r^2\dot{\theta}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})-\frac{2C_1\cos\theta}{\sin^3\theta}\dot{\theta}=g'(\theta)\dot{\theta}$$

或写成

$$r^2\dot{\theta}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})+\frac{d}{dt}\left(\frac{C_1}{\sin^2\theta}\right)=\frac{d}{dt}[g(\theta)]$$

积分之，得

$$r^4\dot{\theta}^2=2\left[g(\theta)-\frac{C_1}{\sin^2\theta}+C_2\right] \tag{4-93}$$

其中 C_2 为由初始条件确定的积分常数。

现在将(4-87)两边同乘以 $\dot{r}$，(4-88)两边同乘以 $\dot{\theta}$，(4-89)两边同乘以 $\dot{\varphi}$，然后相加，便得

$$\begin{aligned}&\dot{r}\ddot{r}+r^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+r\dot{r}\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\sin^2\theta\\&+r\dot{r}\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+r^2\dot{\varphi}^2\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta\\&=\dot{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\dot{\varphi}\frac{\partial U}{\partial \varphi}+\dot{\theta}\frac{\partial U}{\partial \theta}\end{aligned}$$

亦即

$$\frac{dT}{dt}=\frac{dU}{dt}$$

积分之，得

$$T-U=\text{const}$$

或

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(\dot{r}^2-r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)-f(r)\\&-\frac{g(\theta)}{r^2}-\frac{h(\varphi)}{r^2\sin^2\theta}=\frac{1}{2}C\end{aligned} \tag{4-94}$$

其中 C 为积分常数。

再将(4-93)、(4-91)代入(4-94)，便得

$$\dot{r}^2=2f(r)-\frac{2C_2}{r^2}+C$$

因此

$$\frac{dr}{dt}=\pm\sqrt{2f(r)-\frac{2C_2}{r^2}+C} \tag{4-95}$$

积分(4-95)便得 r，t 及积分常数 C_3 之间的关系，相对 r 解出，得

$$r=F(t)$$

方程(4-93)可写成

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=\pm\sqrt{2\left[g(\theta)-\frac{C_1}{\sin^2\theta}+C_2\right]}$$

利用(4-95)，上式可写成

$$\frac{dr}{r^2\sqrt{2f(r)-\frac{2C_2}{r^2}+C}}=\pm\frac{d\theta}{\sqrt{2\left[g(\theta)-\frac{C_1}{\sin^2\theta}+C_2\right]}}$$

积分这一等式便得 r，θ 及积分常数 C_4 之间的关系。将所得等式相对 θ 解出并考虑到 $r=F(t)$，我们得到

$$\theta=G(t)$$

将(4-90)、(4-93)表为

$$\frac{d\varphi}{dt}=\pm\frac{\sqrt{2h(\varphi)+2C_1}}{r^2\sin^2\theta}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\pm\frac{\sqrt{2\left[g(\theta)-\frac{C_1}{\sin^2\theta}+C_2\right]}}{r^2}$$

由此得

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{h(\varphi)+C_1}}=\pm\frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{g(\theta)-\frac{C_1}{\sin^2\theta}+C_2}}$$

积分之后，我们求得 φ，θ 及积分常数 C_5 之间的关系。所得关系相对 φ 解出，并考虑到 $\theta=G(t)$，我们得

$$\varphi=H(t)$$

前面提到的常数 C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 及 C 可由初始条件确定。

例3. 一数学摆质量为 m，挂在弹簧上。弹簧一端固

定，自然长为 l_0。弹簧在平衡位置时的长度是 l，刚性系数为 c，弹簧质量不计。试求摆在铅垂面内运动的方程，并求摆作小振动时的运动（图 4-6）。

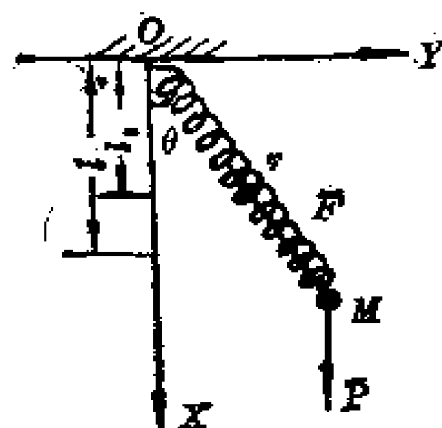


图 4-6

解： 我们取质点 M 为研究对象。它有两个自由度，选点的极坐标 (r, θ) 为广义坐标。质点动能为（第二节例 1）

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2) \qquad (4\text{-}96)$$

现在计算广义力 Q_r, Q_θ。为此，给质点一个特殊的虚位移 $\delta r\neq 0$，$\delta\theta=0$，这时力的元功之和为

$$\delta A_r=P\cos\theta\delta r-F\delta r \qquad (4\text{-}97)$$

其中 P 为重力，F 为弹性力。弹性力的大小等于刚性系数乘以绝对伸长量；弹性力的方向是促使重物恢复到平衡位置。因此

$$F=c(r-l_0) \qquad (4\text{-}98)$$

由平衡位置弹簧长为 l，有

$$P=c(l-l_0)$$

因此

$$l_0=l-\frac{P}{c}$$

将此 l_0 代入(4－98)，得

$$F=c\left(r-l+\frac{P}{c}\right)$$

将此F代入(4-97)，得

$$\delta A_r=(P\cos\theta-cr+cl-P)\delta r$$

因此

$$Q_r=\frac{\delta A_r}{\delta r}=P\cos\theta-cr+cl-P \tag{4-99}$$

今给质点一特殊虚位移$\delta\theta\neq 0$，$\delta r=0$。这时力的元功之和为

$$\delta A_\theta=-P\sin\theta\cdot r\delta\theta$$

故

$$Q_\theta=\frac{\delta A_\theta}{\delta\theta}=-Pr\sin\theta \tag{4-100}$$

质点的第二类拉格朗日方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot r}\right)-\frac{\partial T}{\partial r}=Q_r\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\theta}\right)-\frac{\partial T}{\partial\theta}=Q_\theta\end{aligned}\right\} \tag{4-101}$$

由(4-96)得

$$\frac{\partial T}{\partial\dot r}=m\dot r,\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot r}=m\ddot r,\qquad \frac{\partial T}{\partial r}=mr\dot\theta^2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\theta}=mr^2\dot\theta,\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\theta}=mr^2\ddot\theta+2mr\dot r\dot\theta,$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta}=0$$

将这些导数及广义力(4-99)、(4-100)代入(4-101)，得

$$\left.\begin{aligned}m\ddot r-mr\dot\theta^2=P\cos\theta-cr+cl-P\\ mr^2\ddot\theta+2mr\dot r\dot\theta=-Pr\sin\theta\end{aligned}\right\}$$

注意到$P=mg$，上式可写成

$$
\left.\begin{aligned}
\ddot{r}-r\dot{\theta}^2&=g\cos\theta-\frac{c}{m}r+\frac{c}{m}l-g\\
r^2\ddot{\theta}+2r\dot{r}\dot{\theta}&=-gr\sin\theta
\end{aligned}\right\}\tag{4-102}
$$

今作变换，令

$$
\rho=\frac{r-l}{l}
$$

此ρ即弹簧相对平衡位置的相对伸长。于是(4-102)变换为

$$
\left.\begin{aligned}
\ddot{\rho}-(1+\rho)\dot{\theta}^2&=-\frac{c}{m}\rho-\frac{g}{l}(1-\cos\theta)\\
(1+\rho)\ddot{\theta}+2\dot{\rho}\dot{\theta}&=-\frac{g}{l}\sin\theta
\end{aligned}\right\}\tag{4-103}
$$

方程(4-103)即为所求的运动微分方程。

下面研究点的小振动。在小振动下，θ，$\dot{\theta}$，ρ，$\dot{\rho}$都是小量，于是(4-103)可线性近似为

$$
\left.\begin{aligned}
\ddot{\rho}+\frac{c}{m}\rho&=0\\
\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta&=0
\end{aligned}\right\}\tag{4-104}
$$

方程(4-104)表明，质点有两个主振动，其圆频率分别为$\sqrt{\dfrac{c}{m}}$及$\sqrt{\dfrac{g}{l}}$。

例4. 一平台放在粗糙水平固定面上。在平台上放一圆柱。某瞬时在平台上加一常力$\boldsymbol{F}$，此力通过平台重心并通过圆柱重心在平台上的投影。假设圆柱沿平台无滑动地滚动并忽略平台的厚度（图4-7）。已知：平台重P_1；圆柱重P_2，半径为R；平台与固定平面之间的摩擦系数为k。试确定系统的运动。

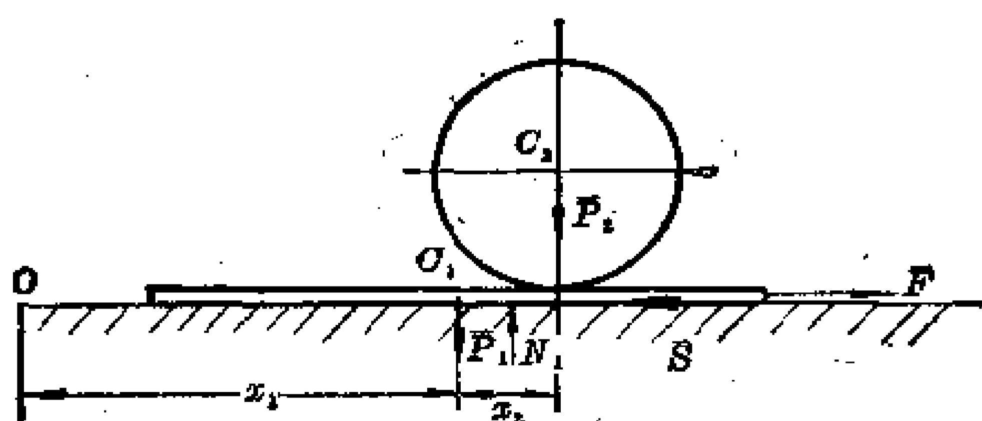


图 4-7

解： 取平台和圆柱为研究对象。平台作平动，而圆柱在其上滚动。取平台重心坐标 x_1 ，圆柱重心相对于平台重心的坐标 x_2 以及圆柱沿平台滚动的转角 φ 为广义坐标是方便的。因圆柱对平台没有滑动，故后两个坐标之间存在完整约束 $x_2=R\varphi$ 。因此，系统有两个自由度，系统位置由两个独立坐标

$$q_1=x_1, \qquad q_2=x_2$$

来确定。

首先，我们计算系统的动能。平台平动的动能为

$$T'=\frac{1}{2}\cdot\frac{P_1}{g}\dot{x}_1^2$$

圆柱平面运动的动能等于质量集中在质心的动能加上相对于质心转动的动能，即

$$\begin{aligned}T''&=\frac{1}{2}\cdot\frac{P_2}{g}(\dot{x}_1+\dot{x}_2)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{P_2}{g}R^2\right)\dot{\varphi}^2\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{P_2}{g}(\dot{x}_1+\dot{x}_2)^2+\frac{1}{4}\cdot\frac{P_2}{g}\dot{x}_2^2\end{aligned}$$

因此，系统的动能为

$$T = T' + T'' = \frac{P_1 + P_2}{2g} \dot{x}_1^2 + \frac{3}{4} \frac{P_2}{g} \dot{x}_2^2 + \frac{P_2}{g} \dot{x}_1 \dot{x}_2 \qquad (4\text{-}105)$$

其次，我们计算广义力。

为求出广义力 Q_1，我们给出特殊的虚位移 $\delta x_1 \neq 0, \delta x_2 = 0$，计算所有力的元功之和，并把摩擦力 $S = (P_1 + P_2)k$ 当作主动力来处理。于是有

$$\delta A_1 = (-S + F)\delta x_1 = [-(P_1 + P_2)k + F]\delta x_1$$

因此广义力

$$Q_1 = \frac{\delta A_1}{\delta x_1} = -(P_1 + P_2)k + F \qquad (4\text{-}106)$$

为求出广义力 Q_2，我们再给出特殊的虚位移 $\delta x_1 = 0$，$\delta x_2 \neq 0$。因为圆柱沿平台不滑动而圆柱与平台之间的摩擦力不作功（这是一个理想约束，参见第一章第四节，2(8)）故 $\delta A_2 = 0$，因此

$$Q_2 = 0 \qquad (4\text{-}107)$$

最后，我们写出第二类拉格朗日方程：

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_1 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial T}{\partial x_2} = Q_2 \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}108)$$

将(4-105)、(4-106)、(4-107)代入(4-108)，便得

$$\left.\begin{aligned} \frac{P_1 + P_2}{g}\ddot{x}_1 + \frac{P_2}{g}\ddot{x}_2 = -(P_1 + P_2)k + F \\ \frac{P_2}{g}\ddot{x}_1 + \frac{3}{2}\frac{P_2}{g}\ddot{x}_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}109)$$

由(4-109)第二式解得

$$\ddot{x}_2=-\frac{2}{3}\ddot{x}_1$$

将此式代入(4-109)第一式，得

$$\ddot{x}_1=\frac{3[F-(P_1+P_2)k]}{3P_1+P_2}g=const$$

例5. 质量分别为 m_1、m_2、m_3 的三个均质齿轮如图4-8所示。给第一个轮以力矩 M_1，另两轮上的反力矩的绝对值等于 M_2，M_3。求每个轮的角加速度及每两轮间的作用力。

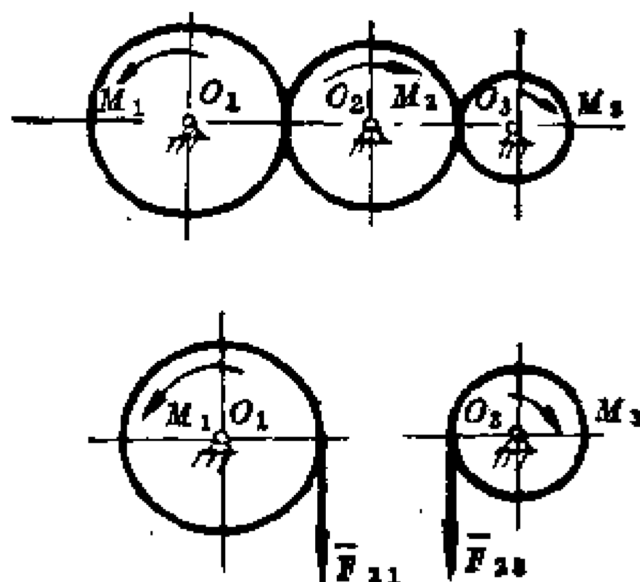


图 4-8

解： 取三个轮为研究对象，系统有一个自由度。选第一个轮转角为 φ_1，则第二、第三个轮的转角为

$$\varphi_2=-\frac{r_1}{r_2}\varphi_1$$

$$\varphi_3=\frac{r_1}{r_3}\varphi_1$$

其中负号表示 φ_2 与 φ_1 转向相反。系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_1r_1^2\right)\dot{\varphi}_1^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_2r_2^2\right)\cdot\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}\dot{\varphi}_1^2\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_3r_3^2\right)\left(\frac{r_1^2}{r_3^2}\dot{\varphi}_1^2\right)$$

$$=\frac{1}{4}(m_1+m_2+m_3)r_1^2\dot{\varphi}_1^2 \tag{4-110}$$

为列写广义力 Q_1，今给第一轮以虚位移 $\delta\varphi_1$，诸力虚功之和为

$$\delta A_1=M_1\cdot\delta\varphi_1+\left(-\frac{r_1}{r_2}\delta\varphi_1\right)M_2+\left(\frac{r_1}{r_3}\delta\varphi_1\right)(-M_3)$$

$$=\left(M_1-M_2\frac{r_1}{r_2}-M_3\frac{r_1}{r_3}\right)\delta\varphi_1$$

因此

$$Q_1=\frac{\delta A_1}{\delta\varphi_1}=M_1-M_2\frac{r_1}{r_2}-M_3\frac{r_1}{r_3} \tag{4-111}$$

第二类拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi_1}=Q_1$$

将(4-110)、(4-111)代入上式，得

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3)r_1^2\ddot{\varphi}_1=M_1-M_2\frac{r_1}{r_2}-M_3\frac{r_1}{r_3} \tag{4-112}$$

因此，第一轮角加速度

$$\varepsilon_1 = \ddot{\varphi}_1 = \frac{2\left(M_1 - \frac{r_1}{r_2}M_2 - \frac{r_1}{r_3}M_3\right)}{(m_1+m_2+m_3)r_1^2} \tag{4-113}$$

而第二轮和第三轮的角加速度分别为

$$\varepsilon_2 = -\frac{r_1}{r_2}\varepsilon_1, \qquad \varepsilon_3 = \frac{r_1}{r_3}\varepsilon_1 \tag{4-114}$$

为求第一、第二轮间的作用力，我们以第一轮为研究对象。它的动能及广义力分别为

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_1 r_1^2\right)\dot{\varphi}_1^2$$

$$Q = M_1 - F_{21}r_1$$

其中 $\boldsymbol{F}_{21}$ 为第二轮对第一轮的作用力。因此第一轮的拉格朗日方程为

$$\frac{1}{2}m_1 r_1^2\ddot{\varphi}_1 = M_1 - F_{21}r_1 \tag{4-115}$$

由此并利用(4-113)，得

$$F_{21} = \frac{(m_2+m_3)M_1}{(m_1+m_2+m_3)r_1} + \frac{m_1}{m_1+m_2+m_3}\cdot\left(\frac{M_2}{r_2}+\frac{M_3}{r_3}\right) \tag{4-116}$$

类似地，以第三轮为对象，它的拉格朗日方程为

$$\frac{1}{2}m_3 r_3^2\ddot{\varphi}_3 = F_{23}r_3 - M_3 \tag{4-117}$$

由此并利用(4-114)、(4-113)，得

$$F_{23} = \frac{(m_1+m_2)M_3}{(m_1+m_2+m_3)r_3} + \frac{m_2}{m_1+m_2+m_3}\left(\frac{M_1}{r_1}-\frac{M_2}{r_2}\right) \tag{4-118}$$

例6. 椭圆摆由一滑块和一单摆构成（图 4-9）。滑块质量为 m_1，可无摩擦地沿水平面滑动；小球质量为 m_2，用长 l 的杆 AB 和滑块相连。杆 AB 能绕与图面垂直、且与滑块 A 相联的轴 A 转动。不计杆的质量，试求椭圆摆运动的微分方程。

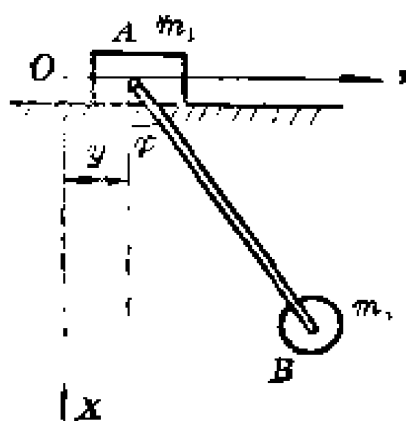


图 4-9

解：取滑块、小球为研究对象。因滑块对水平面无摩擦，故约束是理想的。系统有两个自由度。取滑块中心移动的坐标 y 及杆 AB 相对 A 的转角 φ 为广义坐标。先计算系统的动能。

滑块的动能与小球的动能分别为

$$T'=\frac{1}{2}m_1\dot{y}^2$$

$$T''=\frac{1}{2}m_2[(l\dot{\varphi}\sin\varphi)^2+(\dot{y}+l\dot{\varphi}\cos\varphi)^2]$$

因此，系统的动能为

$$T=T'+T''=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{y}^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2+m_2l\dot{\varphi}\dot{y}\cos\varphi \tag{4-119}$$

其次，计算广义力。

当给系统一虚位移 $\delta y\neq 0$，$\delta\varphi=0$ 时，各力虚功之和为零，故

$$Q_y=0 \tag{4-120}$$

当给系统一虚位移 $\delta y=0$，$\delta\varphi\neq 0$ 时，力 $m_2\boldsymbol{g}$ 的虚功为

$$\delta A_\varphi=-m_2gl\sin\varphi\delta\varphi$$

故

$$Q_\varphi=\frac{\delta A_\varphi}{\delta\varphi}=-m_2gl\sin\varphi \tag{4-121}$$

系统的第二类拉格朗日方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{y}}-\frac{\partial T}{\partial y}=Q_y\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q_\varphi\end{aligned}\right\} \tag{4-122}$$

将(4-119)、(4-120)、(4-121)代入(4-122)，便得

$$\frac{d}{dt}\{(m_1+m_2)\dot{y}+m_2l\dot{\varphi}\cos\varphi\}=0$$

$$m_2l^2\ddot{\varphi}+m_2l\ddot{y}\cos\varphi=-m_2gl\sin\varphi$$

或

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\{(m_1+m_2)\dot{y}+m_2l\dot{\varphi}\cos\varphi\}=0\\ l\ddot{\varphi}+\ddot{y}\cos\varphi+g\sin\varphi=0\end{aligned}\right\} \tag{4-123}$$

例7. 两根长 l，质量为m的杆子 AC 与 BC，其 A端与B端沿一固定铅垂线 OZ 不受摩擦地滑动，并可绕此直线转动；两杆在C点铰联。如以角$\angle ACD=\varphi$，系统绕OZ轴转角θ及距离$z=OD$（D为AB之中点）为参数，在开始时$\varphi=\varphi_0$，$\theta=0$，$z=z_0$，$\dot{\varphi}=0$，$\dot{\theta}=\dot{\theta}_0$，$\dot{z}=0$，求此系统的运动。

解： 取杆 AC、BC 为研究对象。系统自由度是三个。选广义坐标为θ，φ，z（图4-10）。

我们先列写系统的动能。每个杆的动能等于其质量集中在质心的动能加上绕质心转动的动能。取固定直角坐标系$OXYZ$、两个杆所成平面与平面YOZ成角θ。杆AC质

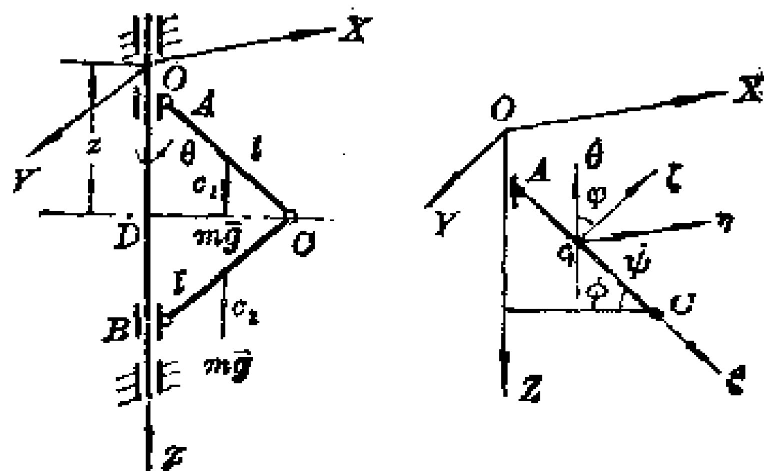


图 4-10

心c_1的坐标为

$$\left.\begin{aligned}x_{c_1}&=\frac{l}{2}\cos\varphi\sin\theta,\\ y_{c_1}&=\frac{l}{2}\cos\varphi\cos\theta,\\ z_{c_1}&=z-\frac{l}{2}\sin\varphi。\end{aligned}\right\}$$

杆 BC 的质心 c_2 的坐标为

$$x_{c_2}=x_{c_1},\qquad y_{c_2}=y_{c_1},\qquad z_{c_2}=z+\frac{l}{2}\sin\varphi$$

因此，

$$\begin{aligned}v_{c_1}^2&=\dot{x}_{c_1}^2+\dot{y}_{c_1}^2+\dot{z}_{c_1}^2\\ &=\left(-\frac{l}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\theta+\frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\varphi\cos\theta\right)^2\\ &\quad+\left(-\frac{l}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\theta-\frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\varphi\sin\theta\right)^2\\ &\quad+\left(\dot{z}-\frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)^2\end{aligned}$$

$$=\frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2+\frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2\cos^2\varphi+\dot{z}^2-l\dot{z}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$v_{c_2}^2=\dot{x}_{c_2}^2+\dot{y}_{c_2}^2+\dot{z}_{c_2}^2$$
$$=\frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2+\frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2\cos^2\varphi+l\dot{z}\dot{\varphi}\cos\varphi+\dot{z}^2$$

杆 AC 相对其质心转动的角速度在其主轴 $c_1\xi$，$c_1\eta$，$c_1\zeta$ 上投影为 $-\dot{\theta}\sin\varphi$，$\dot{\varphi}$，$\dot{\theta}\cos\varphi$；对这些轴的转动惯量为 0，$\frac{1}{12}ml^2$，$\frac{1}{12}ml^2$。杆 BC 有类似的情况。因此杆 AC 的动能为

$$T'=\frac{1}{2}mv_{c_1}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)\dot{\varphi}^2$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)(\dot{\theta}\cos\varphi)^2$$

杆 BC 的动能为

$$T''=\frac{1}{2}mv_{c_2}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)\dot{\varphi}^2$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)(\dot{\theta}\cos\varphi)^2$$

系统的动能

$$T=T'+T''=\frac{1}{2}m\left\{\frac{2}{3}l^2\dot{\varphi}^2+\frac{2}{3}l^2\dot{\theta}^2\cos^2\varphi+2\dot{z}^2\right\}\tag{4-124}$$

为了求出广义力，我们给特殊虚位移 $\delta z=0,\delta\varphi=0,\delta\theta\neq 0$，所有力的元功等于零，故

$$Q_\theta=0\tag{4-125}$$

再给虚位移 $\delta\varphi=\delta\theta=0$，$\delta z\neq 0$，所有力的元功之和为

$$\delta A_z = mg\delta z + mg\delta z = 2mg\delta z$$

因此

$$Q_z = 2mg \tag{4-126}$$

再给出虚位移 $\delta\theta = \delta z = 0$，$\delta\varphi \neq 0$，则所有力的元功之和为

$$\delta A_\varphi = mg\left(-\frac{l}{2}\cos\varphi\delta\varphi\right) + mg\left(\frac{l}{2}\cos\varphi\delta\varphi\right) = 0$$

因此

$$Q_\varphi = 0 \tag{4-127}$$

系统的第二类拉格朗日方程为

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial T}{\partial z} &= Q_z \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_\varphi \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= Q_\theta \end{aligned}\right\} \tag{4-128}$$

将(4-124)、(4-125)、(4-126)、(4-127)代入(4-128)，便得

$$2m\ddot{z} = 2mg$$

$$\frac{2}{3}ml^2\ddot{\varphi} + \frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2\cos\varphi\sin\varphi = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}\cos^2\varphi\right\} = 0$$

或者

$$\ddot{z} = g \tag{4-129}$$

$$\varphi + \dot{\theta}^2\sin\varphi\cos\varphi = 0 \tag{4-130}$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{\theta}\cos^2\varphi) = 0 \tag{4-131}$$

现在我们求方程(4-129)、(4-130)、(4-131)的积分。由(4-131)及初始条件 $t=0$，$z=z_0$，$\dot{z}=0$，积分得

$$z=z_0+\frac{1}{2}gt^2 \tag{4-132}$$

由(4-131)积分得($t=0$，$\dot{\theta}=\dot{\theta}_0$，$\varphi=\varphi_0$)

$$\dot{\theta}\cos^2\varphi=\dot{\theta}_0\cos^2\varphi_0$$

因此

$$\dot{\theta}=\dot{\theta}_0\frac{\cos^2\varphi_0}{\cos^2\varphi} \tag{4-133}$$

将(4-133)代入(4-130)，得

$$\ddot{\varphi}+\dot{\theta}_0^2\cos^4\varphi_0\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi}=0$$

为积分这一方程，将其变为

$$\dot{\varphi}d\dot{\varphi}=-\dot{\theta}_0^2\cos^4\varphi_0\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi}d\varphi$$

积分之，得

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2=-\dot{\theta}_0^2\cos^4\varphi_0\frac{1}{2\cos^2\varphi}+C_1$$

注意到初始条件 $t=0$，$\varphi=\varphi_0$，$\dot{\varphi}=0$，故得

$$C_1=\dot{\theta}_0^2\cos^4\varphi_0\frac{1}{2\cos^2\varphi_0}$$

于是

$$\dot{\varphi}^2=\dot{\theta}_0^2\cos^4\varphi_0\left[\frac{1}{\cos^2\varphi_0}-\frac{1}{\cos^2\varphi}\right] \tag{4-134}$$

或

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi_0}-\frac{1}{\cos^2\varphi}}}=\pm\dot{\theta}_0\cos^2\varphi_0 dt$$

积分之，得

$$t=\pm\frac{1}{\dot{\theta}_0\cos^2\varphi_0}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi_0}-\frac{1}{\cos^2\varphi}}}$$

$$=\pm\frac{1}{\dot{\theta}_0\cos\varphi_0}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\right)^2}}$$

$$=\pm\frac{1}{\dot{\theta}_0\cos\varphi_0}\arcsin\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\right)\Bigg|_{\varphi_0}^{\varphi}$$

$$=\pm\frac{1}{\dot{\theta}_0\cos\varphi_0}\left[\arcsin\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\right)-\frac{\pi}{2}\right]$$

由(4-134)知 $\cos\varphi\geqslant\cos\varphi_0$，又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，故$\varphi\leqslant\varphi_0$，因此上式应取“$-$”号，即

$$t=-\frac{1}{\dot{\theta}_0\cos\varphi_0}\left[\arcsin\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\right)-\frac{\pi}{2}\right]$$

或

$$\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\right)=t\dot{\theta}_0\cos\varphi_0$$

上式两边取余弦，得

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}=\cos(t\dot{\theta}_0\cos\varphi_0)$$

于是有

$$\sin\varphi=\sin\varphi_0\cos(t\dot{\theta}_0\cos\varphi_0) \tag{4-135}$$

最后，将(4-135)代入(4-133)，并积分，得

$$\theta=\dot{\theta}\cos^2\varphi_0\int_0^t\frac{dt}{1-\sin^2\varphi_0\cos^2(t\dot{\theta}_0\cos\varphi_0)}$$

$$=\frac{1}{2}\dot{\theta}\cos^2\varphi_0\left\{\int_0^t\frac{dt}{1+\sin\varphi_0\cos(t\dot{\theta}_0\cos\varphi_0)}\right.$$

$$\left.+\int_0^t\frac{dt}{1-\sin\varphi_0\cos(t\dot{\theta}_0\cos\varphi_0)}\right\}$$

令 $\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\dot{\theta}_0\cos\varphi_0\right)=u$，则

$$1+\sin\varphi_0\cos(t\dot{\theta}_0\cos\varphi_0)$$

$$=\cos^2\left(\frac{t}{2}\dot{\theta}_0\cos\varphi_0\right)+\sin^2\left(\frac{t}{2}\dot{\theta}_0\cos\varphi_0\right)$$

$$+\sin\varphi_0\left[\cos^2\left(\frac{t}{2}\dot{\theta}_0\cos\varphi_0\right)-\sin^2\left(\frac{t}{2}\dot{\theta}_0\cos\varphi_0\right)\right]$$

$$=\frac{1}{1+u^2}(1+\sin\varphi_0)\left[1+\frac{1-\sin\varphi_0}{1+\sin\varphi_0}u^2\right]$$

$$dt=\frac{2}{\dot{\theta}_0\cos\varphi_0}\quad\frac{1}{1+u^2}du$$

因此第一个积分为

$$\frac{2}{\cos^2\varphi_0}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{1-\sin\varphi_0}{1+\sin\varphi_0}}\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\dot{\theta}_0\cos\varphi_0\right)\right]$$

而第二个积分为

$$\frac{2}{\cos^2\varphi_0}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{1+\sin\varphi_0}{1-\sin\varphi_0}}\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\dot{\theta}_0\cos\varphi_0\right)\right]$$

因此

$$\theta=\operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{1-\sin\varphi_0}{1+\sin\varphi_0}}\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\dot{\theta}_0\cos\varphi_0\right)\right]$$

$$+\operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{1+\sin\varphi_0}{1-\sin\varphi_0}}\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\dot{\theta}_0\cos\varphi_0\right)\right]$$

即
$$\mathrm{tg}\,\theta=\frac{1}{\cos\varphi_0}\mathrm{tg}(t\dot{\theta}_0\cos\varphi_0) \qquad (4\text{-}136)$$

方程(4-132)、(4-135)、(4-136)即为所求积分。

例8. 试用拉格朗日方程推求刚体定点转动的欧拉方程。

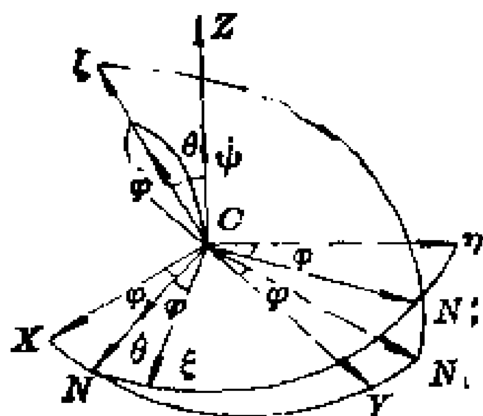


图 4-11

解： 选一固联于刚体上的直角坐标系 $C\xi\eta\zeta$(图4-11)，使坐标轴沿刚体在定点C的惯性主轴，那么由(4-35)知刚体的动能为

$$T=\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2) \qquad (4\text{-}137)$$

刚体角速度在 $C\xi\eta\zeta$ 上的投影 p，q，r 与欧拉角 ψ，θ，φ 及其对时间的导数 $\dot{\psi}$，$\dot{\theta}$，$\dot{\varphi}$ 之间的关系为(4-36)，即

$$\left.\begin{aligned} p&=\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi+\dot{\theta}\cos\varphi \\ q&=\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi-\dot{\theta}\sin\varphi \\ r&=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi} \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}138)$$

今以 ψ，θ，φ 为广义坐标，则对 φ 的拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q_\varphi \qquad (4\text{-}139)$$

因

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial\dot{\varphi}}=Cr$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi}=\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial\varphi}+\frac{\partial T}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial\varphi}+\frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial\varphi}$$

$$= Ap(\dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi) + Bq(-\dot\psi\sin\theta\sin\varphi - \dot\theta\cos\varphi)$$

$$= Apq - Bpq = (A-B)pq$$

将这些表达式代入(4-139)便得

$$C\dot r + (B-A)pq = L_\zeta \qquad (4\text{-}140)$$

方程(4-140)便是欧拉动力学方程之一， 其中 $Q_\varphi = L_\zeta$ 是对应于角位移 φ 的广义力，所以知道是绕 ζ 轴的力矩。因(4-140)不显含 ψ，θ，φ 可应用对称原则将 p，q，r 及 A，B，C 依次轮换，即可得其它两个欧拉方程式：

$$A\dot p + (C-B)qr = L_\xi$$

$$B\dot q + (A-C)rp = L_\eta$$

第四节　有势力情形的拉格朗日方程

运动微分方程的积分以及寻求方程的第一积分的方法是分析力学的很重要的问题。如果点在稳定的势力场中运动，这个问题就变得容易多了。

1. 有势力情形的拉格朗日方程

如果加在系统质点上的给定力具有力函数，即存在一个函数 $U = U(x_i, y_i, z_i)$，使得

$$F_{ix} = \frac{\partial U}{\partial x_i},\qquad F_{iy} = \frac{\partial U}{\partial y_i},\qquad F_{iz} = \frac{\partial U}{\partial z_i}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, N) \qquad (4\text{-}141)$$

这时广义力

$$Q_s = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+ F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+ F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)$$

变换为形式

$$Q_s=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+\frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+\frac{\partial U}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)$$

即

$$Q_s=\frac{\partial U}{\partial q_s} \tag{4-142}$$

具有力函数的系统。我们称之为保守系统。在分析力学中起重要作用的是另一个与力函数相近的势能函数 $V(q_s)$，它与力函数大小相等，符号相反，即 $V(q_s)=-U(q_s)$。

当系统存在力函数时，我们就说系统具有有势力。这时，第二类拉格朗日方程(4-21)取形

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=\frac{\partial U}{\partial q_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{4-143}$$

因为函数仅依赖于广义坐标，故 $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_s}=0$。于是(4-143)可变换为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T+U)}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial(T+U)}{\partial q_s}=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{4-144}$$

现在我们引进函数

$$L=T+U=T-V \tag{4-145}$$

这函数称为拉格朗日函数，或动势。于是(4-144)成为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{4-146}$$

方程(4-146)就是有势力情形的第二类拉格朗日方程。既然

动能T可分为T_2、T_1及T_0三项之和，那么L也有形式$L=L_2+L_1+L_0$，其中

$$L_2=T_2,\quad L_1=T_1,\quad L_0=T_0+U=T_0-V$$

2. 有广义力函数情形的拉格朗日方程

在经典力学中研究以力函数为特征的势力场，此力函数依赖于系统质点的位置，即依赖于坐标，但力函数U（或势能函数V）不明显依赖于时间t。但是，随着电磁现象及其在技术上应用的科学的发展，开辟了以这样的力函数为特征的场：力函数不仅依赖于坐标q_s，而且还依赖于时间t以及广义速度$\dot{q}_s$，这便是广义力函数。这时广义力Q_s用力函数$U(q_s,\dot{q}_s,t)$表示为

$$Q_s=\frac{\partial U}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_s}\qquad (s=1,2,\cdots,n)\qquad (4\text{-}147)$$

此时第二类拉格朗日方程(4-21)取形式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T+U)}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial(T+U)}{\partial q_s}=0$$

拉格朗日函数表为$L=T+U$，而拉格朗日方程仍保持为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0\qquad (s=1,2,\cdots,n)\qquad (4\text{-}148)$$

我们须注意：广义力函数$U(q_s,\dot{q}_s,t)$相对$\dot{q}_s$是线性的，即有形式

$$U=\sum_s A_s(t,q)\dot{q}_s+A(t,q)\qquad (4\text{-}149)$$

因为否则在(4-147)中有依赖于$\ddot{q}_s$的Q_s。

3. 例题

在有势力情形中，为得到第二类拉格朗日方程，只要写出拉格朗日函数$L=T+U=T-V$，然后按(4-146)进行运

算就行了。下面举例说明。

例1. 质量为m的质点，在牛顿引力$F=\frac{Mm\gamma}{r^2}$作用下运动，其中$M\gamma$为常数，r为距固定中心的距离。

解： 我们在球坐标(r, φ, θ)中研究质点的运动(图4-12)。质点的动能按(4-44)，即

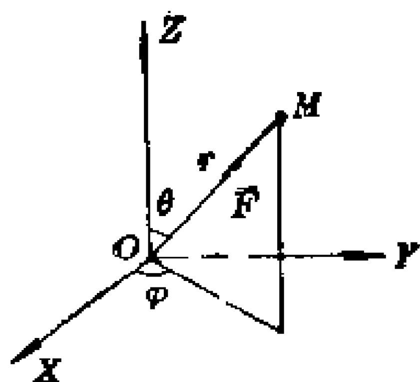


图 4-12

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) \tag{4-150}$$

现在求力函数U。为此，我们计算力$\boldsymbol{F}$的元功。当点有位移$d\varphi$或$d\theta$时力$\boldsymbol{F}$不作功，因力$\boldsymbol{F}$与这些位移相垂直；当有位移dr时，力$\boldsymbol{F}$的元功为

$$dA=-\frac{Mm\gamma}{r^2}dr=d\left(\frac{Mm\gamma}{r}\right)$$

因此，有力函数

$$U=\frac{mM\gamma}{r} \tag{4-151}$$

或有势能函数

$$V=-\frac{mM\gamma}{r} \tag{4-152}$$

于是点的拉格朗日函数为

$$\begin{aligned}L&=T+U=T-V\\&=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+\frac{mM\gamma}{r}\end{aligned} \tag{4-153}$$

由此可按(4-146)写出质点运动微分方程。

例2. 解第三节中的例3（图4-6）。

解：我们取转角θ及弹簧相对平衡位置的相对伸长ρ为广义坐标。点的动能为

$$T=\frac{1}{2}m\{(l\dot{\rho})^2+[l(1+\rho)\dot{\theta}]^2\} \tag{4-154}$$

势能由两部分组成：一是质点重力的势能V_1，一是弹簧的势能V_2。我们取平衡位置为势能的零点，于是

$$V_1=-mg[l(1+\rho)\cos\theta-l]$$

$$V_2=\frac{1}{2}c[l\rho+\delta]^2-\frac{1}{2}c\delta^2$$

其中δ为平衡时弹簧的伸长

因此
$$\delta=\frac{mg}{c}$$

$$V=V_1+V_2=-mgl(1+\rho)\cos\theta+mgl+\frac{1}{2}cl^2\rho^2+mgl\rho \tag{4-155}$$

于是，拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\{(\dot{\rho}l)^2+[l(1+\rho)\dot{\theta}]^2\}+mgl(1+\rho)\cos\theta-mgl-\frac{1}{2}cl^2\rho^2-mgl\rho \tag{4-156}$$

将(4-156)代入(4-146)，易得方程(4-103)。

4. 拉格朗日方程的不变性

我们研究某些变换，拉格朗日方程(4-146)相对这些变换是不变的。

(1) 首先，我们注意到，由拉格朗日函数 L 可造出无穷多个函数 L_1，使其满足方程(4-146)。例如，两个函数 L 和 $L_1=L+\Phi(t)$，彼此相差一个仅依赖于时间 t 的函数，这两个函数 L 和 L_1 显然同时满足拉格朗日方程(4-146)。因此，它们当中的每一个都可取作同一系统的拉格朗日函数。进而，如果研究两个函数 L 和 $L_2=AL$，其中 A 为异于零的任意常数，那么这两个函数将满足同样的拉格朗日方程(4-146)。这可由拉格朗日方程相对函数 L 的齐次性直接得出。

我们研究两个函数 L 和 $L_3=L+\frac{d}{dt}F(q_s, t)$，彼此相差依赖于广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 和时间 t 的某函数的全导数，那么 L_3 也满足拉格朗日方程(4-146)。实际上，因

$$\frac{d}{dt}F(q_s, t)=\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial q_s}\dot{q}_s$$
$$=\Phi(q_s,\dot{q}_s,t)$$

我们有

$$\frac{\partial\Phi}{\partial q_s}=\frac{\partial^2 F}{\partial q_s\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial q_s\partial q_k}\dot{q}_k$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_s}=\frac{\partial F}{\partial q_s}$$

以及 $\frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_s}=\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial q_s}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial q_k\partial q_s}\dot{q}_k$，因此 $\frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial\Phi}{\partial q_s}=0$

于是，函数 $L_3=L+\frac{d}{dt}F(q_s,t)$ 和 L 一样将满足拉格朗日方程(4-146)。

(2) 我们引入新的坐标 Q_s，它们是原坐标 q_k 的函数

$$Q_s=f_s(q_1,q_2,\cdots,q_n)\qquad(s=1,2,\cdots,n)\quad(4-157)$$

设所研究的变换的函数行列式异于零，即

$$\triangle=\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(q_1,q_2,\cdots,q_n)}\neq 0$$

于是，存在逆变换

$$q_s=\Phi_s(Q_1,Q_2,\cdots,Q_n) \qquad (4\text{-}158)$$

而量 Q_s 可作为广义坐标。变换(4-157)称为点变换。

在点变换下，广义速度 $\dot{q}_s$ 可表为广义速度 $\dot{Q}_k$ 的线性式。实际上，对(4-158)求对 t 的导数，我们有

$$\dot{q}_s=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi_s}{\partial Q_k}\dot{Q}_k=\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\dot{Q}_k$$

其中

$$a_{sk}=\frac{\partial q_s}{\partial Q_k}=\frac{\partial\Phi_s(Q_1,Q_2,\cdots,Q_n)}{\partial Q_k} \qquad (4\text{-}159)$$

仅为广义坐标 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$ 的函数。类似地，广义速度 $\dot{Q}_s$ 也是广义速度 $\dot{q}_s$ 的线性式。

现在证明，带函数行列式$\triangle\neq 0$的点变换相对拉格朗日方程是不变的，即，如果由广义坐标 q_s 和广义速度 $\dot{q}_s$ 向广义坐标 Q_k 和广义速度 $\dot{Q}_k$ 过渡，那么拉格朗日方程(4-146)过渡到新的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{Q}_s}-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial Q_s}=0 \qquad (4\text{-}160)$$

其中 $\tilde{L}$ 为由变换(4-158)得到的新的拉格朗日函数

$$\tilde{L}(Q_s,\dot{Q}_s,t)=L(\Phi_s(Q_k),\dot{\Phi}_s(Q_k,\dot{Q}_k),t) \qquad (4\text{-}161)$$

由(4-161)知

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{Q}_s}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial\dot{Q}_s}$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_s}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_k}\ \frac{\partial q_k}{\partial Q_s}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial Q_s}$$

由(4-158)和(4-159)，有

$$\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_s}=\frac{\partial q_k}{\partial Q_s}=a_{ks} \tag{4-162}$$

因此

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_s}=\sum_{k=1}^{n}\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}a_{ks}$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_s}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_k}\ a_{ks}\ +\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial Q_s}$$

进而，利用(4-146)，我们有

$$\frac{d}{dt}\ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_s}=\sum_{k=1}^{n}\ \frac{d}{dt}\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ a_{ks}\ +\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ \frac{d}{dt}a_{ks}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_k}\ a_{ks}\ +\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ \frac{d}{dt}a_{ks}$$

因此求得

$$\frac{d}{dt}\ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_s}-\frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_s}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{d}{dt}\ a_{ks}\ -\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial Q_s}\right) \tag{4-163}$$

又

$$\frac{d}{dt}\ a_{ks}\ =\frac{d}{dt}\ \frac{\partial q_k}{\partial Q_s}=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 q_k}{\partial Q_l\partial Q_s}\dot{Q}_l$$

而

$$\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial Q_s}=\frac{\partial}{\partial Q_s}\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial q_k}{\partial Q_l}\ \dot{Q}_l\ \right)=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 q_k}{\partial Q_s\partial Q_l}\dot{Q}_l$$

因此，(4-163)成为

$$\frac{d}{dt}\ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_s}-\frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_s}=0$$

于是拉格朗日方程在点变换下的不变性得以证明。

(3) 设系统由N个质量为m_i的质点组成，点的直角坐标为$x_i, y_i, z_i (i=1,2,\cdots,N)$。作相似变换

$$\left.\begin{aligned} &m_i=\mu m_i', \quad t=\tau t' \\ &x_i=\lambda x_i', \quad y_i=\lambda y_i', \quad z_i=\lambda z_i' \end{aligned}\right\} \tag{4-164}$$

则原系统变为由质量为m_i'，坐标为x_i'、y_i'、z_i'的N个质点组成的相似系统。写出原系统的拉格朗日函数

$$L=T-V=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i v_i^2-V(x_i,y_i,z_i,m_i) \tag{4-165}$$

及变换了的系统的拉格朗日函数

$$L_1=T_1-V_1=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i' v_i'^2-V(x_i',y_i',z_i',m_i') \tag{4-166}$$

因系统动能对质量m_i是一次齐次的，对速度v_i是二次齐次的，则由相似变换(4-164)得到

$$T=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i v_i^2=\frac{\mu\lambda^2}{\tau^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i' v_i'^2$$

或者

$$T=\frac{\mu\lambda^2}{\tau^2}T_1 \tag{4-167}$$

另一方面，由于所有物理量相对于基本单位：长度、质量和时间，是齐次的，因而对所有异于零的λ和μ，有下述关系

$$V(\lambda x_i',\lambda y_i',\lambda z_i',\mu m_i')=\lambda^p\mu^\nu V(x_i',y_i',z_i',m_i')$$

这里p和ν是V相对坐标x_i, y_i, z_i及质量m_i的齐次性阶指数。因此

$$V(x_i,y_i,z_i,m_i)=V(\lambda x_i',\lambda y_i',\lambda z_i',\mu m_i')$$
$$=\lambda^p\mu^\nu V(x_i',y_i',z_i',m_i')$$

或者

$$V=\lambda^p\mu^\nu V_1 \tag{4-168}$$

于是相似变换的结果最终为

$$L=\frac{\mu\lambda^2}{\tau^2}T_1-\lambda^p\mu^\nu V_1 \tag{4-169}$$

为使原系统的运动与由相似变换所得系统的运动用同样的方程来描述，必须使两个系统的拉格朗日函数 $L=T-V$ 和 $L_1=T_1-V_1$ 差一个因子。当$\frac{\mu\lambda^2}{\tau^2}$与 $\lambda^p\mu^\nu$ 符号相同时，需满足条件

$$\frac{\mu\lambda^2}{\tau^2}=\lambda^p\mu^\nu$$

因此，参数μ、λ 和 τ 是不独立的，必须满足

$$\mu^{\nu-1}\lambda^{p-2}\tau^2=1 \tag{4-170}$$

下面举例说明相似变换的应用。

例 质量为 m_1 和 m_2 的两质点在同一轨道上运动，试在下述条件下确定两质点经历的时间之比：1) 两质点的势能相同；2)势能之比为 $1:\nu$。

解：作相似变换

$$m_1=\mu m_2,\quad t_1=\tau t_2,\quad \lambda=1$$

当两质点的势能相同时，有

$$V_1=V_2,\quad T_1=\frac{\mu}{\tau^2}T_2$$

因此

$$\frac{\mu}{\tau^2}=1$$

而

$$\tau=\sqrt{\mu}=\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

τ 就是两质点经历的时间之比。

当 $V_1:V_2=1:\nu$ 时，有

$$V_1=\frac{1}{\nu}V_2, \qquad T_1=\frac{\mu}{\tau^2}T_2$$

因此

$$\tau=\sqrt{\mu\nu}=\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\sqrt{\frac{V^2}{V_1}}$$

第五节　循环积分与能量积分

在有势力情形下，拉格朗日方程有两种重要的第一积分——循环积分和能量积分。

1.　运动方程的第一积分

由拉格朗日方程的一般显式(4-74)，可解出广义加速度 $\ddot{q}_s$ 为广义坐标 q_k、广义速度 $\dot{q}_k$ 及时间 t 的函数，即

$$\ddot{q}_s=f_s(q_k,\dot{q}_k,t) \qquad (s,k=1,2,\cdots,n) \qquad (4\text{-}171)$$

我们称某个函数 $f(q_s,\dot{q}_s,t)=C$（C为常数）为二阶微分方程(4-171)的第一积分，如果它对时间 t 的全导数由于(4-171)而等于零，即

$$\frac{df}{dt}=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s+\frac{\partial f}{\partial q_s}\dot{q}_s\right)+\frac{\partial f}{\partial t}=0 \qquad (4\text{-}172)$$

其中 $\ddot{q}_s$ 用(4-171)替代。

研究运动方程的第一积分是很有意义的。如果我们能够求得(4-171)的 $2n$ 个独立的第一积分

$$f_\nu(q_s,\dot{q}_s,t)=C_\nu \qquad (\nu=1,2,\cdots,2n) \qquad (4\text{-}173)$$

那么可由此将 q_s、$\dot{q}_s$ 表为时间 t 及 $2n$ 个任意常数 C_ν 的函数，而得到微分方程的通解

$$\left.\begin{aligned} q_s&=\varphi_s(t,C_1,C_2,\cdots,C_{2n})\\ \dot{q}_s&=\psi_s(t,C_1,C_2,\cdots,C_{2n})\end{aligned}\right. \qquad (4\text{-}174)$$

其中 $2n$ 个任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_{2n}$ 可由初始条件，即广义坐标的初值 q_{s0} 及广义速度的初值 $\dot{q}_{s0}$ 来确定。它们与 $C_1,C_2,\cdots,C_{2n}$ 的关系可如此确定：令 $t=0$，以 q_{s0}，$\dot{q}_{s0}$ 代入(4-174)，便得相对 $C_1,C_2,\cdots,C_{2n}$ 的方程组为

$$\left.\begin{aligned} \varphi_s(0,C_1,C_2,\cdots,C_{2n})&=q_{s0}\\ \psi_s(0,C_1,C_2,\cdots,C_{2n})&=\dot{q}_{s0}\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}175)$$

$$(s=1,2,\cdots,n)$$

2. 循环坐标与循环积分

设具有 n 个自由度的完整保守系统的运动方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (1\text{-}176)$$

其中 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 为广义坐标，L 为拉格朗日函数。在有些问题中，如果某一个广义坐标，例如 q_1 不明显出现于拉格朗日函数 L 中，就称 q_1 为循环坐标*。此时，由(4-176)得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=0$$

将此式积分便得

* 循环坐标也叫可遗坐标

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=C_1 \tag{4-177}$$

其中C_1为任意常数。显然，积分(4-177)是方程(4-176)的一个第一积分。我们称它为循环积分。

因L为广义速度的二次形，故循环积分相对广义速度是线性的。还必须注意，存在或不存在循环积分，取决于广义坐标如何选取。

下面阐明循环积分的物理意义。

我们先假定，循环坐标q_1有这样的性质：即当其余坐标$q_2,q_3,\cdots,q_n$保持不变时，q_1若有改变量l，相应于系统平移一线段l。取此移动方向为轴OX正向，则有

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}&=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}=\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_1}+\dot{y}_i\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_1}+\dot{z}_i\frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_1}\right)\\&=\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{x}_i=C_1\end{aligned}$$

因此，如果循环坐标的改变相应于系统在某方向的平移，那么相应的循环积分表示系统的动量在此方向上的投影守恒。

其次，我们假定循环坐标的改变量为α，相应于整个系统绕空间某固定直线转一角度α。取此空间固定直线为轴OZ，并设第i质点的矢径为$\boldsymbol{r}_i$，有

$$x_i=r_i\cos\varphi_i,\quad y_i=r_i\sin\varphi_i\quad (i=1,2,\cdots,N)$$

我们求得

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_1}=\frac{\partial x_i}{\partial \varphi_i}=-r_i\sin\varphi_i=-y_i$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial q_1}=\frac{\partial y_i}{\partial \varphi_i}=r_i\cos\varphi_i=x_i$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial q_1}=0$$

因此

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=\sum_{i=1}^{N}m_i(x_i\dot{y}_i-\dot{x}_iy_i)=C_1$$

这一表达式的左边乃是系统相对轴 OZ 的动量矩。因此，如果循环坐标的改变相应于整个系统绕某固定直线的转动，那么相应的循环积分表示系统相对该直线的动量矩守恒。

但是，在更一般的情况下，循环积分不一定有明显的物理意义。

如果在拉格朗日函数中出现两个或多个循环坐标的话，可类似地得到同数目个相应的第一积分。

3. 能量积分

对于带有拉格朗日函数 $L=T+U=T-V$ 的完整力学系统，在确定的条件下存在着以运动中能量变化为特征的积分。为了推求这个积分，我们首先变换拉格朗日方程(4-176)。将(4-176)的每个方程乘以 $\dot{q}_s$ 并对 s 求和，得

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)\dot{q}_s-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\dot{q}_s=0 \qquad (4-178)$$

第一个和的每一项可变为

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)\dot{q}_s=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\cdot\dot{q}_s\right)-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s \qquad (4-179)$$

于是(4-178)成为

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)-\sum_{s=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s\right)=0 \qquad (4-180)$$

(4-180)中第二个和

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s\right)=\frac{dL}{dt}-\frac{\partial L}{\partial t} \tag{4-181}$$

因此(4-180)变为

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)+\frac{\partial L}{\partial t}-\frac{dL}{dt}=0 \tag{4-182}$$

拉格朗日函数L用系统动能及力函数表示为

$$L=T+U=T_2+T_1+T_0+U \tag{4-183}$$

下面分三种情形讨论：

(1) 所研究的力学系统是完全稳定的。此时函数L不明显依赖于时间t，并且系统动能是广义速度的齐二次式：

$$T=T_2=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{sk}\dot{q}_s\dot{q}_k$$

$$L=T_2+U$$

此时关系(4-182)可表为

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)-\frac{dL}{dt}=0 \tag{4-184}$$

现在我们应用数学分析中关于多变量的齐次函数的欧拉定理来变换(4-184)中的第一个和。某一函数，如果满足

$$f(\alpha\xi_i)=\alpha^k f(\xi_i)$$

其中α为某个常数，则称为多变量ξ_i的k阶齐次函数。指数k称为齐次性的阶指数。欧拉定理表示齐次函数的这样的重要性质：齐次函数对所有变量ξ_i的偏导数与这些变量的乘积之和等于所给函数与齐次性阶指数的乘积，即恒满足关系

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \xi_i}\xi_i=kf(\xi_i)$$

例如，$f=x^3+3y^2x+yx^2$ 是三阶齐次多项式，$k=3$。我们来检验欧拉定理

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y \\
&\qquad=(3x^2+3y^2+2yx)x+(6yx+x^2)y \\
&\qquad=3(x^3+3y^2x+yx^2)
\end{aligned}
$$

我们再来研究(4-184)。因为 T_2 是 $\dot{q}_s$ 的齐二次函数，利用欧拉定理，我们有

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s=2T_2$$

在(4-184)中第二项 $L_2=T_2+U$，于是(4-184)变为

$$\frac{d}{dt}(2T_2)-\frac{d}{dt}(T_2+U)=0$$

即

$$\frac{d}{dt}(T_2-U)=0$$

由此得系统运动方程的第一积分

$$T-U=h \tag{4-185}$$

其中 h 是任意常数。(4-185)也可写成

$$T+V=h \tag{4-186}$$

其中 V 为系统的势能。积分(4-186)表明：对于完全稳定的力学系统，在不依赖于时间的势力作用下的运动，具有机械能量守恒的经典积分，根据这个积分，系统的整个能量在运动过程中保持为常值，即能量保持而不耗散。因此，在势力场中运动的稳定的力学系统称为保守力学系统。

(2) 进而我们假设，拉格朗日函数对时间 t 的偏导数仍

然等于零：$\dfrac{\partial L}{\partial t}=0$。即时间 t 不明显出现于 L 中；但系统动能不只是齐二次函数 T_2，而在一般情形中表示为 $T=T_2+T_1+T_0$（但不显含 t）。这种情形就是第二节中提到的所谓半不稳定系统。按(4-182)式得

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L\right]=0$$

所以得广义能量积分

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L=\text{const}$$

在此情形中 L 表为

$$L=T_2+T_1+T_0+U$$

关系(4-182)可表为下列形式：

$$\frac{d}{dt}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s+\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)-\frac{d}{dt}(T_2+T_1+T_0+U)=0 \tag{4-187}$$

注意到 T_2 为 $\dot{q}_s$ 的齐二次式，T_1 是 $\dot{q}_s$ 的线性式，利用欧拉定理有

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s=2T_2,\qquad \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s=T_1$$

将其代入(4-187)中，便得

$$\frac{d}{dt}(2T_2+T_1)-\frac{d}{dt}(T_2+T_1+T_0+U)=0$$

或

$$\frac{d}{dt}(T_2-T_0-U)=0$$

因此，最终有

$$T_2 - T_0 - U = h^* = const \tag{4-188}$$

或

$$T_2 - T_0 + V = h^* = const \tag{4-189}$$

关系(4-188)或(4-189)是拉格朗日方程的第一积分，但它不表示能量守恒定律。这个积分叫做雅科比—班勒维(Jacobi-Painlevé)积分，或广义能量积分。

(3) 最后的情形，即完全不稳定系统的情形，这时$\frac{\partial L}{\partial t} \neq 0$，即时间 t 明显地出现于T中，也可能出现于U中。在这种情形中，表示系统中整个能量变化的任何积分都不存在。

4. 例题

例1. 某个有两个自由度的完整系统，其拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{q}_1^2}{a + bq_2^2} + \dot{q}_2^2\right) - (a_1 + b_1 q_2^2),$$

其中a，b，a_1，b_1为正值常数，求此系统的运动。

解： 因拉格朗日函数L不显含时间t，故(4-182)给出

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s - L\right\} = 0$$

积分，得

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s - L = h$$

即

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{q}_1^2}{a + bq_2^2} + \dot{q}_2^2\right) + a_1 + b_1 q_2^2 = h \tag{4-190}$$

这便是能量积分。

我们注意到坐标q_1不出现于L中，故有循环积分

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=C_1$$

或

$$\frac{\dot{q}_1}{a+bq_2^2}=C_1 \tag{4-191}$$

其中C_1为任意常数。

现在利用(4-190)、(4-191)这两个第一积分来求解。由(4-191)知

$$\dot{q}_1=C_1(a+bq_2^2)$$

将此$\dot{q}_1$代入(4-190)，有

$$\dot{q}_2^2=(2h-2a_1-C_1^2a)-(2b_1+C_1^2b)q_2^2$$

将此方程两边对时间求导数，得

$$\ddot{q}_2+(2b_1+C_1^2b)q_2=0$$

它的通解为

$$q_2=A\sin(\sqrt{2b_1+C_1^2b}\,t+\alpha) \tag{4-192}$$

其中A，α为积分常数。将(4-192)代入(4-191)并积分得

$$q_1=C_1\left(a+\frac{bA^2}{2}\right)t-\frac{bC_1A^2}{4k}\sin 2(kt+\alpha)+C \tag{4-193}$$

其中C为积分常数，而$k=\sqrt{2b_1+C_1^2b}$。

解(4-192)、(4-193)中包含四个任意常数A，α，C_1，C，它们可由初始条件确定。

例2. 一薄的铅垂平板(图4-13)可无摩擦地绕铅垂轴OZ旋转。质点M可无摩擦地沿平板上的直槽移动。已知平

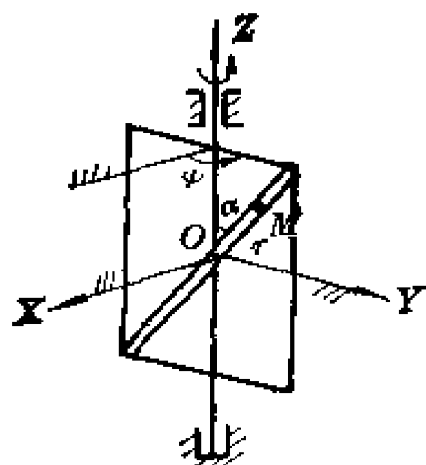


图 4-13

板对轴 OZ 的转动惯量为 J，质点的质量为 m，槽与铅垂轴之间的角 $\alpha=$ 常数($0<\alpha<\pi/2$)。试按以下两种情形，写出系统运动的第一积分：(1)平板的初角速度 $\dot{\psi}_0\neq0$；(2)平板以给定的角速度 ω 转动（这个问题叫"贝甘(Beghin)问题"（1948年）。

解：(1)平板的初角速度 $\dot{\psi}_0\neq0$ 的情形

此时系统有两个自由度。加在系统上的约束是完整的、稳定的。取距离 $OM=r$ 及平板相对于空间固定铅垂面 XOZ 的转角 ψ 为广义坐标。

系统的动能由质点 M 的动能 T' 及平板的动能 T'' 组成：

$$T'=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\psi}^2\sin^2\alpha)$$

$$T''=\frac{1}{2}J\dot{\psi}^2$$

因此系统动能为

$$T=T'+T''=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}(J+mr^2\sin^2\alpha)\dot{\psi}^2$$

系统的势能，即质点 M 的势能（以 O 为零点）为

$$V=mgr\cos\alpha$$

因此系统的拉格朗日函数

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}(J+mr^2\sin^2\alpha)\dot{\psi}^2-mgr\cos\alpha \tag{4-194}$$

由(4-194)知，ψ 是循环坐标，故有循环积分

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}=k$$

其中 k 为积分常数，即

$$(J+mr^2\sin^2\alpha)\dot{\psi}=k \tag{4-195}$$

系统还有能量积分

$$T+V=h$$

即

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}(J+mr^2\sin^2\alpha)\dot{\psi}^2+mgr\cos\alpha=h \tag{4-196}$$

由两个积分(4-195)、(4-196)便可求解。

(2) 平板以给定的常角速度 ω 转动的情形

这时系统有一个自由度，选距离 $OM=r$ 作为广义坐标。系统的动能

$$T=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}(J+mr^2\sin^2\alpha)\omega^2$$

系统的势能

$$V=mgr\cos\alpha$$

系统的拉格朗日函数为

$$\begin{aligned}L&=T-V\\&=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}(J+mr^2\sin^2\alpha)\omega^2-mgr\cos\alpha\end{aligned}$$

这系统没有循环积分，因 r 明显出现于 L 中。这系统没有通常的能量积分，因为在系统上加上了不稳定约束 $\psi=\omega t$，或者说因动能不是广义速度的齐二次式。但是在系统上仅作用有势力且函数 L 不明显依赖于时间（半不稳定系统），因此有广义能量积分

$$T_2-T_0+V=h^*$$

由T的表达式知

$$T_2=\frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

$$T_0=\frac{1}{2}(J+mr^2\sin^2\alpha)\omega^2$$

故广义能量积分为

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2-\frac{1}{2}(J+mr^2\sin^2\alpha)\omega^2+mgr\cos\alpha=h^* \tag{4-197}$$

方程(4-197)在初始条件 $t=0, r=r_0, \dot{r}=\dot{r}_0$ 下的解为

$$r=\left(r_0-\frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin\alpha}\right)\mathrm{ch}(\omega t\sin\alpha)+\frac{\dot{r}_0}{\omega\sin\alpha}\mathrm{sh}(\omega t\sin\alpha)+\frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} \tag{4-198}$$

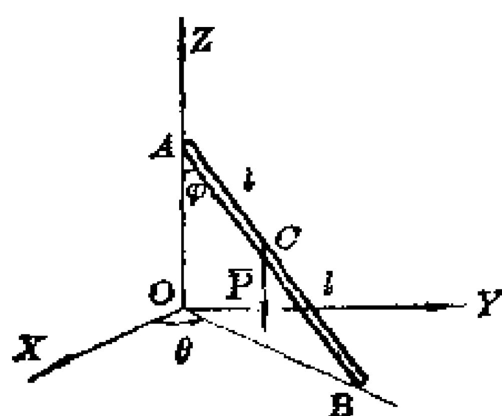


图 4-14

例3. 一均质杆AB，长$2l$，重P，杆的端点A沿铅垂直线无摩擦地滑动，而端点B则在水平面上无摩擦地滑动(图4-14)，试求杆运动的第一积分。

解: 杆AB所受约束是理想的、双面的、完整的。系统有两个自由度，取杆AB与铅垂线OZ构成的平面与空间固定平面XOZ的夹角θ，及杆AB与轴OZ夹角φ为广义坐标。

我们先建立动能T的表达式，它等于杆质心的动能T'加上相对质心转动的动能T''。因

$$x_c = l\sin\varphi\cos\theta$$
$$y_c = l\sin\varphi\sin\theta$$
$$z_c = l\cos\varphi$$
$$\dot{x}_c = l\dot{\varphi}\cos\varphi\cos\theta - l\dot{\theta}\sin\varphi\sin\theta$$
$$\dot{y}_c = l\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\theta + l\dot{\theta}\sin\varphi\cos\theta$$
$$\dot{z}_c = -l\dot{\varphi}\sin\varphi$$

故

$$\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2 = l^2\dot{\varphi}^2 + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\varphi$$

因此

$$T' = \frac{1}{2}m(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2) = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\varphi}^2 + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\varphi)$$

而

$$T'' = \frac{1}{2}J(\dot{\theta}^2\sin^2\varphi + \dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)(\dot{\theta}^2\sin^2\varphi + \dot{\varphi}^2)$$

于是，系统动能为

$$T = T' + T'' = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}ml^2(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\sin^2\varphi)$$

作用于系统上的力是有势力，势能为

$$V = mgl\cos\varphi$$

因此系统的拉格朗日函数为

$$L = T - V = \frac{2}{3}ml^2(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\sin^2\varphi) - mgl\cos\varphi \quad (4\text{-}199)$$

因L中不出现θ，故有循环积分

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = C$$

其中C为任意常数，即

$$\frac{4}{3}ml^2\dot{\theta}\sin^2\varphi=C \tag{4-200}$$

系统又有能量积分

$$T+V=h$$

即

$$\frac{2}{3}ml^2(\dot{\varphi}^2+\dot{\theta}^2\sin^2\varphi)+mgl\cos\varphi=h \tag{4-201}$$

方程(4-200)、(4-201)即为所求的第一积分，由此可求问题的解。

例4. 试证：如拉格朗日函数$L=L_1+F(t)$，其中L_1完全与时间t无关，则存在积分

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s=L_1+const \tag{4-202}$$

证明： 因

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L_1\right)&=\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s\right)-\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s\right.\\&\left.+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L_1}{\partial q_s}\dot{q}_s\right)=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L_1}{\partial q_s}\right)\dot{q}_s\\&+\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_s}\right)\ddot{q}_s\end{aligned} \tag{4-203}$$

又

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}=\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s}=\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_s}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}$$

故(4-203)第二个和为零。因

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}=\frac{\partial L_1}{\partial q_s}+\frac{\partial F}{\partial q_s}=\frac{\partial L_1}{\partial q_s}$$

故(4-203)成为

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L_1\right)=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}\right)\dot{q}_s$$

而由 L 满足拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0$$

最后得

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L_1\right)=0 \tag{4-204}$$

这就证明了

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L_1=\text{const}$$

是系统的第一积分。

例5． 作用于理想、完整力学系统的力可分为两部分：有势力，势能为 $V(q_k)$以及非有势力 Q_s'。系统的拉格朗日方程可写成形式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s' \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{4-205}$$

试证：如果 L 不显含 t，即

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0 \tag{4-206}$$

并且 Q_s' 为陀螺力，即

$$\sum_{s=1}^{n}Q_s'\dot{q}_s=0 \tag{4-207}$$

则存在广义能量积分

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s - L = \text{const} \tag{4-208}$$

证明： 我们利用(4-205)直接计算(4-208)对时间的导数

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s - L\right)$$
$$= \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s}\right)\dot{q}_s - \frac{\partial L}{\partial t}$$
$$= \sum_{s=1}^{n} Q_s' \dot{q}_s - \frac{\partial L}{\partial t}$$

将(4-206)和(4-207)代入上式，得

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s - L\right) = 0$$

积分之，便得(4-208)。

第六节　拉格朗日方程的降阶法

应用循环积分和能量积分可以将拉格朗日方程降阶，这种降阶法也是积分拉格朗日方程的重要手段。

1.　应用循环积分的降阶法（罗兹(Routh)法）

英国学者罗兹于1876年得到了应用循环积分将拉格朗日方程降阶的方法，而且得到的动力学方程式仍保持拉格朗日方程的形式。

设受有势力的完整力学系统的自由度是 n，则有形如

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{4-209}$$

的 n 个拉格朗日方程。又设力学系统有 $k(k<s)$ 个循环坐标

$q_1, q_2, \cdots, q_k$，那么我们就有 k 个循环积分

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \beta_j \qquad (j=1,2,\cdots,k) \tag{4-210}$$

因拉格朗日函数中不含 $q_1, q_2, \cdots, q_k$，故 L 有形

$$L = L(q_{k+1}, q_{k+2}, \cdots, q_n;\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_k, \dot{q}_{k+1}, \cdots, \dot{q}_n, t) \tag{4-211}$$

于是，由 $L=T-V$ 知道，$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ 不但是 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_k$ 的线性式，而且不含 $q_1, q_2, \cdots, q_k$，所以（4-210）是 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_k$ 的线性方程组，可以解出 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_k$ 作为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ 和 $\dot{q}_{k+1}, \cdots, \dot{q}_n, q_{k+1}, \cdots, q_n$ 及 t 的函数，即求得

$$\dot{q}_j = f_j(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k, q_{k+1}, q_{k+2}, \cdots, q_n, \dot{q}_{k+1}, \dot{q}_{k+2}, \cdots, \dot{q}_n, t) \qquad (j=1,2,\cdots,k) \tag{4-212}$$

现在定义函数

$$R = L - \sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \tag{4-213}$$

它称为罗兹函数。应用(4-212)，我们可将 R 中全部 $\dot{q}_j (j=1,2,\cdots,k)$ 消去，结果将 R 表为

$$R = R(q_{k+1}, q_{k+2}, \cdots, q_n, \dot{q}_{k+1}, \dot{q}_{k+2}, \cdots, \dot{q}_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k, t) \tag{4-214}$$

当 $q_{k+1}, q_{k+2}, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n$ 发生无限小变更 $\delta q_{k+1}, \delta q_{k+2}, \cdots, \delta q_n, \delta \dot{q}_1, \delta \dot{q}_2, \cdots, \delta \dot{q}_n$ 或 $\delta q_{k+1}, \delta q_{k+2}, \cdots, \delta q_n, \delta \dot{q}_{k+1}, \delta \dot{q}_{k+2}, \cdots, \delta \dot{q}_n, \delta\beta_1, \delta\beta_2, \cdots, \delta\beta_k$，那么函数 L 和 R 随着产生微小变更，所以由(4-213)得

$$\delta R = \delta\left(L - \sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

$$=\delta L-\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\delta\dot{q}_j-\sum_{j=1}^{k}\dot{q}_j\delta\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\right)$$

由(4-210)知

$$\delta\beta_j=\delta\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\right)$$

故

$$\delta R=\delta L-\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\delta\dot{q}_j-\sum_{j=1}^{k}\dot{q}_j\delta\beta_j \tag{4-215}$$

但由(4-211)有

$$\delta L=\sum_{r=k+1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_r}\delta q_r+\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\delta\dot{q}_j+\sum_{r=k+1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_r}\delta\dot{q}_r \tag{4-216}$$

又自(4-214)知

$$\delta R=\sum_{r=k+1}^{n}\frac{\partial R}{\partial q_r}\delta q_r+\sum_{r=k+1}^{n}\frac{\partial R}{\partial\dot{q}_r}\delta\dot{q}_r+\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial R}{\partial\beta_j}\delta\beta_j \tag{4-217}$$

将(4-216)及(4-217)代入(4-215)，合并且移项，得

$$\sum_{r=k+1}^{n}\left(\frac{\partial R}{\partial\dot{q}_r}-\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_r}\right)\partial\dot{q}_r+\sum_{r=k+1}^{n}\left(\frac{\partial R}{\partial q_r}-\frac{\partial L}{\partial q_r}\right)\delta q_r$$
$$+\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial R}{\partial\beta_j}+\dot{q}_j\right)\delta\beta_j=0$$

但 $\delta q_{k+1},\cdots,\delta q_n,\delta\dot{q}_{k+1},\cdots,\delta\dot{q}_n,\delta\beta_1,\cdots,\delta\beta_k$ 是彼此独立的，所以必须有其系数恒为零，即

$$\frac{\partial R}{\partial q_r}-\frac{\partial L}{\partial q_r}=0,\quad \frac{\partial R}{\partial\dot{q}_r}-\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_r}=0,$$

$$\frac{\partial R}{\partial\beta_j}+\dot{q}_j=0\qquad(r=k+1,k+2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,k) \tag{4-218}$$

将(4-218)前二式代入(4-209)，得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r}-\frac{\partial R}{\partial q_r}=0 \qquad (r=k+1,k+2,\cdots,n) \tag{4-219}$$

方程(4-219)与拉格朗日方程(4-209)形式完全一致，罗兹函数R与拉格朗日函数L的地位相同，只是方程式只剩下了$(n-k)$个。方程(4-219)称为罗兹方程。

方程(4-218)的最后一式可写成

$$\frac{dq_j}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial \beta_j}$$

积分得

$$q_j=-\int\frac{\partial R}{\partial \beta_j}dt \qquad (j=1,2,\cdots,k) \tag{4-220}$$

方程(4-220)表示各循环坐标为时间t的函数。

因此我们得出结论：有n个自由度的受有势力的完整力学系统，如有k个广义坐标为循环坐标，则此系统的n个拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n)$$

可简化为$n-k$个罗兹方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r}-\frac{\partial R}{\partial q_r}=0 \qquad (r=k+1,k+2,\cdots,n)$$

的求解。其中

$$R=L-\sum_{j=1}^{k}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

此R中的$\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_k$须由方程组$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=\beta_j$解出，化为$q_{k+1}$，$q_{k+2},\cdots,q_n$及$\dot{q}_{k+1},\dot{q}_{k+2},\cdots,\dot{q}_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$及$t$的函数。

例题 有一两个自由度的力学系统，广义坐标为 q_1, q_2。系统的动能和势能分别是

$$T=\frac{1}{2}\frac{\dot{q}_1^2}{a+bq_2^2}+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2, \qquad V=a_1+b_1q_2^2$$

其中 a，b，a_1，b_1 为正值常数，试解此力学系统的运动。

解：因

$$L=T-V=\frac{1}{2}\frac{\dot{q}_1^2}{a+bq_2^2}+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2-a_1-b_1q_2^2$$

L 中不含 q_1，所以 q_1 是循环坐标。求 L 对 $\dot{q}_1$ 的偏导数，得

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=\frac{\dot{q}_1}{a+bq_2^2}=\beta$$

由此解出循环坐标对应的速度

$$\dot{q}_1=\beta(a+bq_2^2)$$

造罗兹函数，并利用上式从中消去 $\dot{q}_1$，得

$$\begin{aligned}R&=L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\dot{q}_1\\&=\left(\frac{1}{2}\frac{\dot{q}_1^2}{a+bq_2^2}+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2-a_1-b_1q_2^2\right)-\left(\frac{\dot{q}_1}{a+bq_2^2}\right)\cdot\dot{q}_1\\&=-\frac{1}{2}\frac{\dot{q}_1^2}{a+bq_2^2}+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2-a_1-b_1q_2^2\\&=-\frac{1}{2}\beta^2(a+bq_2^2)+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2-a_1-b_1q_2^2\end{aligned}$$

罗兹方程 $\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_2}-\frac{\partial R}{\partial q_2}=0$ 成为

$$\frac{d}{dt}(\dot{q}_2)-(-2b_1q_2-\beta^2bq_2)=0$$

即

$$\ddot{q}_2+(2b_1+b\beta^2)q_2=0$$

上式通解为

$$q_2=A\sin(\sqrt{2b_1+b\beta^2}\,t+\alpha)$$

而循环坐标按(4-220)为

$$q_1=-\int\frac{\partial R}{\partial\beta}dt=\int\beta(a+bq_2^2)dt$$

$$=\beta at+\beta b\int A^2\sin^2(\sqrt{2b_1+b\beta^2}\,t+\alpha)dt$$

$$=\left(\beta a+\frac{1}{2}\beta bA^2\right)t$$

$$-\frac{\beta bA^2}{4\sqrt{2b_1+b\beta^2}}\sin 2\cdot(\sqrt{2b_1+b\beta^2}\,t+\alpha)+C$$

其中 A，α、β，C 为积分常数。这与上节中的结果一样。

2. 应用能量积分的降阶法（惠特克(Whittaker)法）

英国学者惠特克于1900年得到用能量积分将拉格朗日方程降阶的方法，他的方法与罗兹方法很相象。

将 L 中的 $\dot{q}_2,\dot{q}_3,\cdots,\dot{q}_n$ 分别用 $\dot{q}_1q'_2,\dot{q}_1q'_3,\cdots,\dot{q}_1q'_n$ 代替，其中

$$q'_r=\frac{dq_r}{dq_1}$$

故

$$\dot{q}_1q'_r=\dot{q}_1\frac{dq_r}{dq_1}=\dot{q}_r\qquad(r=2,3,\cdots,n)$$

代换后的函数 L 用 Ω 表示，即

$$L(\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_n,q_1,q_2,\cdots,q_n)$$
$$=\Omega(\dot{q}_1,q'_2,q'_3,\cdots,q'_n,q_1,q_2,\cdots,q_n)$$

将上式分别对 $\dot{q}_1,\dot{q}_r(r=2,3,\cdots,n)$ 及 $q_r(r=1,2,\cdots,n)$ 取导

数，得

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1}+\sum_{r=2}^{n}\frac{\partial \Omega}{\partial q'_r}\ \frac{\partial q'_r}{\partial \dot{q}_1}$$

$$=\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1}+\sum_{r=2}^{n}\frac{\partial \Omega}{\partial q'_r}\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1}\right)$$

$$=\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1}-\sum_{r=2}^{n}\frac{\partial \Omega}{\partial q'_r}\ \frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1^2} \tag{4-221}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}=\frac{\partial \Omega}{\partial q'_r}\ \frac{\partial q'_r}{\partial \dot{q}_r}=\frac{\partial \Omega}{\partial q'_r}\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\left(\frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1}\right)=\frac{1}{\dot{q}_1}\ \frac{\partial \Omega}{\partial q'_r}$$

$$(r=2,3,\cdots,n) \tag{4-222}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_r}=\frac{\partial \Omega}{\partial q_r}\qquad (r=1,2,\cdots,n) \tag{4-223}$$

将(4-222)代入(4-221)，得

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}+\sum_{r=2}^{n}\frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1}\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\ \frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1} \tag{4-224}$$

令L中不显含t（完全稳定系统或半不稳定系统），则按(4-182)，有广义能量积分

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_r-L=h \tag{4-225}$$

在能量积分(4-225)中$\dot{q}_r$以$\dot{q}_1 q'_r(r=2,3,\cdots,n)$代替，并且解出$\dot{q}_1$，得

$$\dot{q}_1=f(q'_2,q'_3,\cdots,q'_n,q_1,q_2,\cdots,q_n) \tag{4-226}$$

将(4-226)的$\dot{q}_1$代入(4-224)所得函数定义为L'，即

$$L'(q'_2,q'_3,\cdots,q'_n,q_1,q_2,\cdots,q_n)=\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} \tag{4-227}$$

将(4-227)对q'_r取导数，有

$$\frac{\partial L'}{\partial q'_r}=\frac{\partial^2 \Omega}{\partial q'_r \partial \dot{q}_1}+\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_r} \tag{4-228}$$

对 q_r 取导数数，有

$$\frac{\partial L'}{\partial q_r}=\frac{\partial^2 \Omega}{\partial q_r \partial \dot{q}_1}+\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_r} \tag{4-229}$$

为简化(4-228)及(4-229)，将(4-224)乘以 $\dot{q}_1$ 得

$$\dot{q}_1 \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1}=\dot{q}_1 \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1}=\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_r$$

应用能量积分(4-225)，上式可写成

$$\dot{q}_1 \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1}=h+L$$

因 $L=\Omega$，故上式又可写成

$$\dot{q}_1 \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1}=h+\Omega$$

将上式看作是 $\dot{q}_1$ 对 $q'_2, q'_3, \cdots, q'_n, q_1, q_2, \cdots, q_n$ 的函数关系式，并分别对 q'_r 及 q_r 取导数，得

$$\dot{q}_1 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_r}+\dot{q}_1 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1 \partial q'_r}=\frac{\partial \Omega}{\partial q'_r} \tag{4-230}$$

$$\dot{q}_1 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_r}+\dot{q}_1 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1 \partial q_r}=\frac{\partial \Omega}{\partial q_r} \tag{4-231}$$

将(4-228)与(4-230)比较，得

$$\frac{\partial L'}{\partial q'_r}=\frac{1}{\dot{q}_1} \frac{\partial \Omega}{\partial q'_r} \qquad (r=2,3,\cdots,n)$$

将(4-229)与(4-231)比较，得

$$\frac{\partial L'}{\partial q_r}=\frac{1}{\dot{q}_1} \frac{\partial \Omega}{\partial q_r} \qquad (r=1,2,\cdots,n)$$

利用(4-222)、(4-223)，以上二式成为

$$\frac{\partial L'}{\partial q'_r}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\text{及}\frac{\partial L'}{\partial q_r}=\frac{1}{\dot{q}_1}\frac{\partial L}{\partial q_r} \tag{4-232}$$

将(4-232)代入拉格朗日方程(4-209)，得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial q'_r}-\dot{q}_1\frac{\partial L'}{\partial q_r}=0 \quad (r=2,3,\cdots,n)$$

或

$$\frac{d}{dq_1}\left(\frac{\partial L'}{\partial q'_r}\right)-\frac{\partial L'}{\partial q_r}=0 \quad (r=2,3,\cdots,n) \tag{4-233}$$

方程 (4-233) 就是惠特克方程，它仍然和拉格朗日方程的形式相似，只是q_1代替了时间 t 的地位。由此应用能量积分可将 n 个自由度的力学问题降为$n-1$ 个自由度的力学问题。

由于 L' 中仍含有独立变数 q_1，所以在一般情形中，不能再由方程(4-233)得到新的能量积分。但是，如果原有问题的方程中 q_1 是循环坐标，即 L 中不含 q_1，那么上面的所有推导式中依旧不含 q_1，于是(4-233)也不含 q_1，此时便可得到新的能量积分

$$\sum_{r=2}^{n} q'_r\frac{\partial L'}{\partial q'_r}-L'=\text{const.} \tag{4-234}$$

这是因为

$$\begin{aligned}\frac{dL'}{dq_1}&=\sum_{r=2}^{n}\frac{\partial L'}{\partial q'_r}q''_r+\sum_{r=2}^{n}\frac{\partial L'}{\partial q_r}q'_r\\&=\sum_{r=2}^{n}q''_r\frac{\partial L'}{\partial q'_r}+\sum_{r=2}^{n}q'_r\frac{d}{dq_1}\left(\frac{\partial L'}{\partial q'_r}\right)\\&=\frac{d}{dq_1}\left(\sum_{r=2}^{n}q'_r\frac{\partial L'}{\partial q'_r}\right)\end{aligned}$$

故

$$\frac{d}{dq_1}\left(\sum_{r=2}^{n} q'_r \frac{\partial L'}{\partial q'_r} - L'\right) = 0$$

积分之，便得(4-234)。再应用新的能量积分，又可将动力学方程降阶，成为$(n-2)$个自由度的问题。如此在同样的情况下，此法可继续使用。

综合罗兹法和惠特克法，若n个自由度的完整保守力学系统有$n-1$个循环坐标，那么就可以用下述任一种方法将动力学方程用单积分解出来：

(1) 首先应用罗兹法将n个自由度由$n-1$个循环积分将其降阶为一个自由度q。然后对此坐标可得能量积分

$$\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = h$$

上式是q和$\dot{q}$的关系式。若自上式可求得$\dot{q}=f(q)$，则积分得

$$t = \int \frac{dq}{f(q)} + \text{const}$$

(2) 首先应用惠特克法将n个自由度的力学方程用能量积分降为$n-1$个自由度。于是新得的方程中由于都是循环坐标，所以继续存在着新的能量积分，如此可继续进行降阶，直到成为一个自由度的力学问题。然后按照(1)中的最后一步用单积分解出最后一个方程式。

例题

一力学系统的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2} f(q_2)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 - \psi(q_2)$$

试用惠特克法求解。

解：系统有能量积分

$$\frac{1}{2}f(q_2)\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2+\psi(q_2)=h$$

将 $\dot{q}_2=\dot{q}_1q_2'$ 代入上式，得

$$\frac{1}{2}f(q_2)\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}(\dot{q}_1q_2')^2+\psi(q_2)=h$$

解出 $\dot{q}_1$

$$\dot{q}_1=\sqrt{\frac{2h-2\psi(q_2)}{f(q_2)+q_2'^2}} \tag{4-235}$$

又 Ω 为 L 中 $\dot{q}_2$ 用 $\dot{q}_1q_2'$ 代替而得的式子，所以

$$\Omega=\frac{1}{2}f(q_2)\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}(\dot{q}_1q_2')^2-\psi(q_2)$$

应用(4-227)求 L'。我们有

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{q}_1}=f(q_2)\dot{q}_1+(\dot{q}_1q_2')q_2'=[f(q_2)+q_2'^2]\dot{q}_1$$

将(4-235)的 $\dot{q}_1$ 代入上式，便得

$$L'=\sqrt{2(h-\psi(q_2))(f(q_2)+q_2'^2)} \tag{4-236}$$

惠特克方程为

$$\frac{d}{dq_1}\left(\frac{\partial L'}{\partial q_2'}\right)-\frac{\partial L'}{\partial q_2}=0 \tag{4-237}$$

因 L' 中不含 q_1，故(4-237)存在着新的能量积分

$$q_2'\frac{\partial L'}{\partial q_2'}-L'=h \tag{4-238}$$

因

$$\frac{\partial L'}{\partial q_2'}=\frac{\sqrt{2}\,q_2'\sqrt{h-\psi(q_2)}}{\sqrt{f(q_2)+q_2'^2}},$$

所以(4-238)变为

$$\frac{\sqrt{2}\,q_2'^2\sqrt{h-\psi(q_2)}}{\sqrt{f(q_2)+q_2'^2}}-\sqrt{2[f(q_2)+q_2'^2][h-\psi(q_2)]}=K$$

或

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{h-\psi(q_2)}}{\sqrt{f(q_2)+q_2'^2}}[q_2'^2-f(q_2)-q_2'^2]=K$$

或

$$\frac{2[h-\psi(q_2)]}{f(q_2)+q_2'^2}[f(q_2)]^2=K^2$$

由此解得

$$q_2'=\sqrt{\frac{2[f(q_2)]^2[h-\psi(q_2)]}{K^2}-f(q_2)}$$

因$q_2'=\frac{dq_2}{dq_1}$，所以上式可积分为

$$q_1=-\frac{K}{\sqrt{2}}\int\frac{dq_2}{\sqrt{f(q_2)\left\{f(q_2)[h-\psi(q_2)]-\frac{K^2}{2}\right\}}}$$

第七节* 变量可分离的拉格朗日方程和刘维方程

在这一节我们研究一类完全可积的系统。

1. 分离变量与局部能量积分

考虑一个完整的、有势的力学系统，广义坐标为 $q_1, q_2, \cdots, q_n$。如果有一个广义坐标，例如 q_1，在系统的动能 T 和势能 V 中被分离出来，即

$$\left.\begin{aligned} T &= T_1 + \tilde{T}(q_2, \cdots, q_n, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n, t) \\ V &= V_1 + \tilde{V}(q_2, \cdots, q_n, t) \end{aligned}\right\} \tag{4-239}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} u_1(q_1) \dot{q}_1^2 \\ V_1 &= W_1(q_1) \end{aligned}\right\} \tag{4-240}$$

必须注意 T_1、V_1 都不显含时间 t。此时系统关于 q_1 的拉格朗日方程为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= \frac{d}{dt} [u_1(q_1)\dot{q}_1] - \frac{1}{2} u_1'(q_1) \dot{q}_1^2 \\ &= -W_1'(q_1) \end{aligned}$$

即

$$u_1(q_1)\ddot{q}_1 + \frac{1}{2} u_1'(q_1) \dot{q}_1^2 = -W_1'(q_1) \tag{4-241}$$

将(4-241)两端同乘以 $2\dot{q}_1$，得到

$$\frac{d}{dt}[u_1(q_1)\dot{q}_1^2 + 2W_1(q_1)] = 0$$

因而有

$$T_1 + V_1 = \frac{1}{2} u_1(q_1) \dot{q}_1^2 + W_1(q_1) = C_1 = \text{const} \tag{4-242}$$

这样的广义坐标 q_1 称为系统的分离保守坐标。对于分离保守坐标，有局部的能量积分(4-242)。利用局部能量积分，q_1 可以被积分出来。

由(4-242)得到

$$\frac{dq_1}{dt}=\sqrt{\frac{2[C_1-W_1(q_1)]}{u_1(q_1)}}$$

因而

$$t=\int\sqrt{\frac{u_1(q_1)}{2[C_1-W_1(q_1)]}}dq_1+\gamma_1 \tag{4-243}$$

如果系统的所有广义坐标$q_1,q_2,\cdots,q_n$全为分离保守的，即

$$T=\sum_{s=1}^{n}T_s,\quad V=\sum_{s=1}^{n}V_s \tag{4-244}$$

其中

$$\begin{aligned}T_s&=\frac{1}{2}u_s(q_s)\dot{q}_s^2\\ V_s&=W_s(q_s)\end{aligned} \tag{4-245}$$

此时显然有n个分离变量的局部能量积分

$$\begin{aligned}T_s+V_s&=\frac{1}{2}u_s(q_s)\dot{q}_s^2+W_s(q_s)\\ &=C_s=\text{const}\\ &(s=1,2,\cdots,n)\end{aligned} \tag{4-246}$$

应注意，此时系统的总能量积分只是这n个积分的推论，不是另一个独立的积分。

利用n个局部能量积分，系统的运动完全可用积分表达出来：

$$t=\int\sqrt{\frac{u_s(q_s)}{2[C_s-W_s(q_s)]}}dq_s+\gamma_s\quad(s=1,2,\cdots,n) \tag{4-247}$$

(4-247)给出了系统全部的解，其中C_s, γ_s为$2n$个积分常数。

2. 刘维方程

1849年刘维（Liouville）将上述完全保守系统的结果推广如下：凡力学系统的动能和势能可以分别写成

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\{u_1(q_1)+u_2(q_2)+\cdots+u_n(q_n)\} \\ &\quad\cdot\{V_1(q_1)\dot{q}_1^2+V_2(q_2)\dot{q}_2^2+\cdots+V_n(q_n)\dot{q}_n^2\} \\ V &= \frac{W_1(q_1)+W_2(q_2)+\cdots+W_n(q_n)}{u_1(q_1)+u_2(q_2)+\cdots+u_n(q_n)} \end{aligned}\right\} \tag{4-248}$$

那么此力学系统可以分成单积分的形式来求解。如令

$$\sqrt{V_s(q_s)}\,dq_s = dq_s^* \qquad (s=1,2,\cdots n) \tag{4-249}$$

则

$$\dot{q}_s^* = \sqrt{V_s(q_s)}\cdot\dot{q}_s$$

或

$$\dot{q}_s^{*2} = V_s(q_s)\dot{q}_s^2 \tag{4-250}$$

这样，(4-248)变换为

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\{u_1^*(q_1^*)+u_2^*(q_2^*)+\cdots+u_n^*(q_n^*)\} \\ &\quad\cdot\{\dot{q}_1^{*2}+\dot{q}_2^{*2}+\cdots+\dot{q}_n^{*2}\} \\ V &= \frac{W_1^*(q_1^*)+W_2^*(q_2^*)+\cdots+W_n^*(q_n^*)}{u_1^*(q_1^*)+u_2^*(q_2^*)+\cdots+u_n^*(q_n^*)} \end{aligned}\right\} \tag{4-251}$$

为书写简单起见，以下略去所有星号，并令

$$u = \sum_{s=1}^{n} u_s(q_s), \qquad W = \sum_{s=1}^{n} W_s(q_s) \tag{4-252}$$

于是有

$$\left.\begin{aligned} T&=\frac{1}{2}u(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\cdots+\dot{q}_n^2)\\ V&=\frac{W}{u}\end{aligned}\right\}\tag{4-253}$$

关于q_1的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}-\frac{\partial T}{\partial q_1}=-\frac{\partial V}{\partial q_1}$$

成为

$$\frac{d}{dt}(u\dot{q}_1)-\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\cdots+\dot{q}_n^2)\frac{\partial u}{\partial q_1}=-\frac{\partial V}{\partial q_1}\tag{4-254}$$

将(4-254)两端同乘以$2u\dot{q}_1$，得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(u^2\dot{q}_1^2)-u\dot{q}_1(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\cdots+\dot{q}_n^2)\frac{\partial u}{\partial q_1}\\ =-2u\dot{q}_1\frac{\partial V}{\partial q_1}\end{aligned}\tag{4-255}$$

系统的能量积分给出

$$\frac{1}{2}u(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\cdots+\dot{q}_n^2)=h-V\tag{4-256}$$

其中h为能量常数。将(4-256)代入(4-255)，得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(u^2\dot{q}_1^2)&=2(h-V)\dot{q}_1\frac{\partial u}{\partial q_1}-2u\dot{q}_1\frac{\partial V}{\partial q_1}\\ &=2\dot{q}_1\frac{\partial}{\partial q_1}\{(h-V)u\}\\ &=2\dot{q}_1\frac{\partial}{\partial q_1}\{hu_1(q_1)-W_1(q_1)\}\\ &=2\frac{d}{dt}\{hu_1(q_1)-W_1(q_1)\}\end{aligned}\tag{4-257}$$

因而得到第一个局部能量积分

$$\frac{1}{2}u^2\dot{q}_1^2=hu_1(q_1)-W_1(q_1)+\gamma_1 \tag{4-258}$$

其中 γ_1 是积分常数。对 $q_2, q_3, \cdots, q_n$ 我们可得到形式相同的方程

$$\frac{1}{2}u^2\dot{q}_s^2=hu_s(q_s)-W_s(q_s)+\gamma_s \quad (s=2,3,\cdots,n) \tag{4-259}$$

由(4-258)和(4-259)，得到

$$\frac{dq_1}{\sqrt{hu_1(q_1)-W_1(q_1)+\gamma_1}}=\frac{dq_2}{\sqrt{hu_2(q_2)-W_2(q_2)+\gamma_2}}$$

$$=\cdots=\frac{dq_n}{\sqrt{hu_n(q_n)-W_n(q_n)+\gamma_n}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{u}dt \tag{4-260}$$

以上各式变量已经分离，所以可以分别积分。

由于能量积分的存在，积分常数 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ 并不是彼此无关的。实际上，将(4-258)和(4-259)相加，并对 s 求和，得到

$$\frac{1}{2}u^2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\cdots+\dot{q}_n^2)$$

$$=h\sum_{s=1}^{n}u_s(q_s)-\sum_{s=1}^{n}W_s(q_s)+\sum_{s=1}^{n}\gamma_s$$

即

$$uT=hu-uV+(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n)$$

或

$$\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n=u(T+V-h)=0 \tag{4-261}$$

3. **例题**

例1. 多自由度常系数线性系统是一类完全分离保守系统。

解: 多自由度常系数线性系统的动能可表为广义速度的二次型

$$T=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\dot{q}_s\dot{q}_k \tag{4-262}$$

其中 a_{sk} 为常数。势能则表为广义坐标的二次型

$$V=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{sk}q_sq_k \tag{4-263}$$

由于 T 是广义速度的正定二次型，根据代数已知定理，一定可以找到一个非奇异线性变换，使 T 化成平方和，而 V 同时化成带系数的平方和，即

$$\left.\begin{aligned}T&=\sum_{s=1}^{n}\dot{q}_s^{*2}\\V&=\sum_{s=1}^{n}\lambda_sq_s^{*2}\end{aligned}\right\} \tag{4-264}$$

比较(4-264)和(4-244)，可知(4-264)系统显然是完全分离保守系统。因此存在 n 个局部能量积分，并且系统是完全可积的。

例2. 球面摆长为 l，试用刘维法求运动积分。

解: 应用球坐标（图 4-15），可将质点的动能写成

$$T=\frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2+l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) \tag{4-265}$$

而势能

$$V=mgl\cos\theta \tag{4-266}$$

为应用刘维法，将T、V写成:

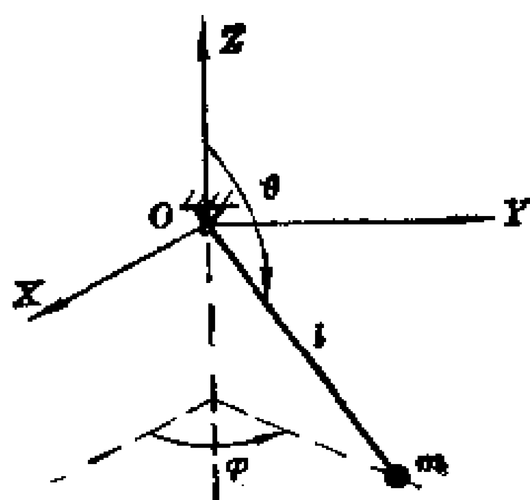


图 4-15

$$\left.\begin{aligned}&T=\frac{1}{2}ml^2\sin^2\theta\left[\frac{\dot{\theta}^2}{\sin^2\theta}+\dot{\varphi}^2\right]\\&V=\frac{m^2gl^3\cos\theta\sin^2\theta}{ml^2\sin^2\theta}\end{aligned}\right\}\tag{4-267}$$

对照(4-248)，我们有

$$\left.\begin{aligned}&u_\theta(\theta)=ml^2\sin^2\theta,\quad V_6(\theta)=\frac{1}{\sin^2\theta}\\&W_\theta(\theta)=m^2gl^3\cos\theta\sin^2\theta\\&u_\varphi(\varphi)=0,\ V_\varphi(\varphi)=1,\ W_\varphi(\varphi)=0\end{aligned}\right\}\tag{4-268}$$

令

$$\dot{\theta}^{*2}=\frac{\dot{\theta}^2}{\sin^2\theta},\qquad \dot{\varphi}^*=\dot{\varphi}\tag{4-269}$$

则(4-260)给出

$$\frac{d\theta^*}{\sqrt{h\cdot ml^2\sin^2\theta-m^2gl^3\cos\theta\sin^2\theta+\gamma_1}}$$

$$=\frac{d\varphi^*}{\sqrt{\gamma_2}}=\frac{\sqrt{2}\,dt}{ml^2\sin^2\theta}\tag{4-270}$$

这结果给出下面两个关系：

$$\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{ml^2\sin\theta d\theta}{\sqrt{2}\sqrt{ml^2\sin^2\theta(h-mgl\cos\theta)+\gamma_1}}=t-t_0 \tag{4-271}$$

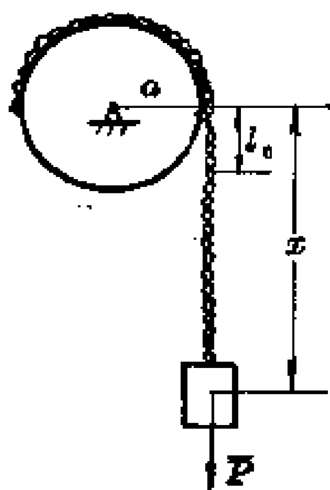
$$\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\sqrt{\gamma_2}d\theta}{\sin\theta\sqrt{ml^2\sin^2\theta(h-mgl\cos\theta)+\gamma_1}}=\varphi-\varphi_0 \tag{4-272}$$

其中

$$\gamma_1+\gamma_2=0 \tag{4-273}$$

第四章　习　　题

4-1　在拉格朗日方程(4-21)的推导中利用了哪两个经典的拉格朗日关系？方程(4-21)对具有怎样的约束系统才成立(单面或双面，稳定或不稳定，完整或非完整，理想或不理想)？



题 4-2 图

4-2　一重物重P，悬于绳上。绳长为l、重P_1，绳之一部分绕在鼓轮上。鼓轮半径为a，重P_2，转轴水平。在初瞬时$t=0$，系统静止，绳下垂长l_0。设鼓轮的质量均匀分布，不计摩擦，求重物的运动。

答：方程

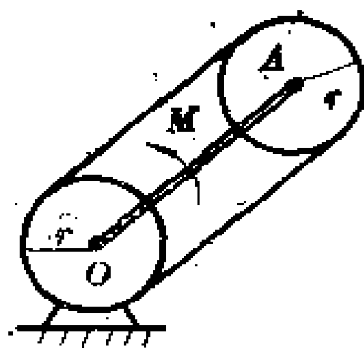
$$\ddot{x}-\frac{P_1g}{(P+P_1+P_2)l}x=\frac{Pg}{P+P_1+P_2}$$

解为

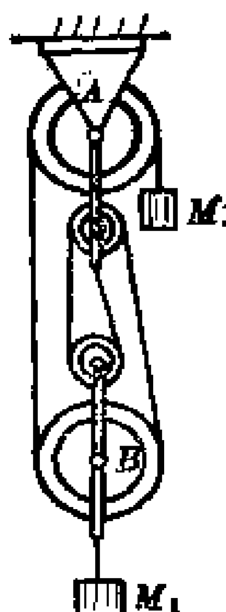
$$x = -\frac{P}{P_1}l + \left(l_0 + \frac{P}{P_1}l\right)\operatorname{ch}\sqrt{\frac{P_1 g}{(P+P_1+P_2)l}}\,t$$

4-3 曲柄$OA=l$，由转矩M使其绕一固定滑轮的中心转动，滑轮半径为r。曲柄的一端A上带一动滑轮，其半径为r。定滑轮与动滑轮用皮带联结，皮带拉紧，使当系统运动时，皮带不沿轮缘滑动。设曲柄为均匀杆，重P，滑轮重Q，机构在水平面内。试求曲柄的角加速度

答：$\varepsilon = \dfrac{3Mg}{(P+3Q)l^2}$



题 4-3 图



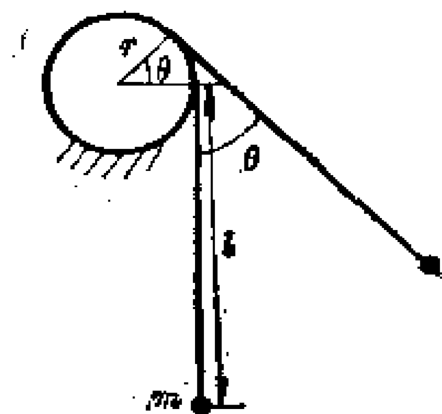
题 4-4 图

4-4 重物M重 1010N，借滑车组将重物M_1举起。重物M_1和滑轮组的运动部分共重 3200N。滑车共四个，两个大滑轮每个重 160N，两个小滑轮每个重 80N，大滑轮半径为r，小滑轮半径为r_1，求M的加速度。

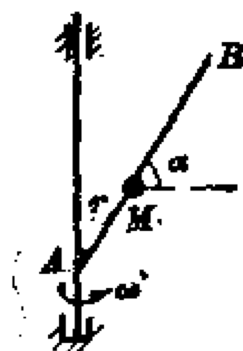
答： $a=\frac{15}{155.5}g$

4-5 一质点质量为m，挂在一条线上，线的另一端绕在半径为r的固定圆柱体上。设在平衡位置时线长l，且不计线的质量，试列写质点摆动的运动方程。

答：$(l+r\theta)\ddot{\theta}+r^2\dot{\theta}^2+g\sin\theta=0$



题 4-5 图



题 4-6 图

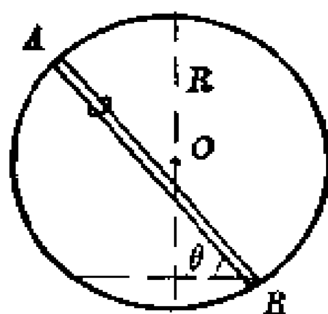
4-6 一质点M在重力作用下沿一以等角速ω绕固定铅垂轴转动的直线AB而运动，直线AB与水平成α角。求此质点运动规律。

答： $r=C_1e^{\omega t\cos\alpha}+C_2e^{-\omega t\cos\alpha}+\frac{g\sin\alpha}{\omega^2\cos^2\alpha}$

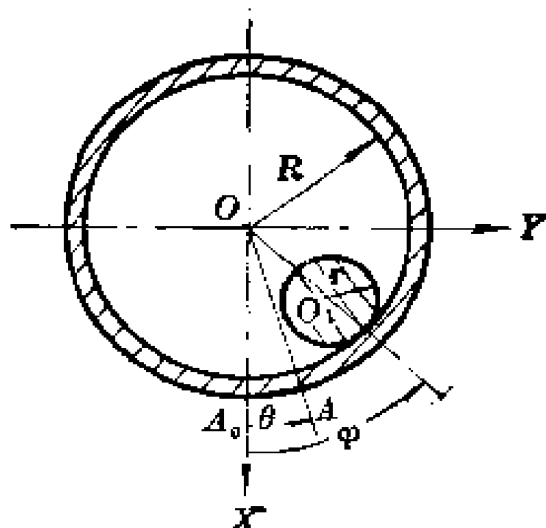
4-7 一均质杆长$2a$，质量为M，两端在一半径为R的光滑固定水平圆周上滑动，另一质量是m的小环以不变的相对速度v沿杆运动，试求杆的运动。

答：$t=0$，$\theta=\theta_0$，m在杆中点

$$\theta-\theta_0=C\cdot\mathrm{arctg}\frac{vt}{\sqrt{R^2-a^2+\frac{M}{m}\left(R^2-\frac{2}{3}a^2\right)}}$$



题 4-7 图



题 4-8 图

4-8　一粗糙圆柱体质量为m，半径为r，在一空心圆柱体内表面上无滑动地滚动。这空心圆柱的质量是M，半径是R，能绕本身水平轴O转动，两圆柱对其自身轴的转动惯量分别为MR^2及$\frac{1}{2}mr^2$，试写出系统运动方程。

答：设θ——空心圆柱转角，φ——两柱心联线的转角，有

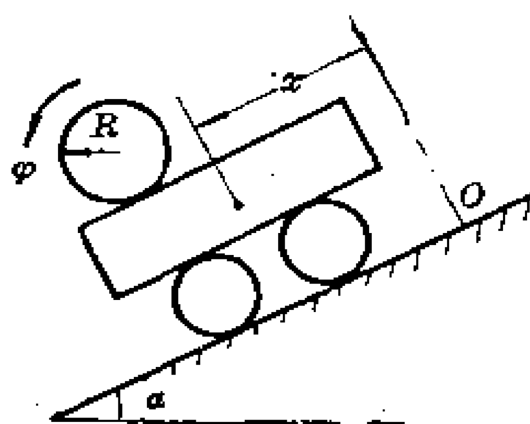
$$\left(M+\frac{1}{2}m\right)R\ddot{\theta}-\frac{1}{2}m(R-r)\ddot{\phi}=0$$

$$\frac{3}{2}(R-r)\ddot{\phi}-\frac{1}{2}R\ddot{\theta}+g\sin\varphi=0$$

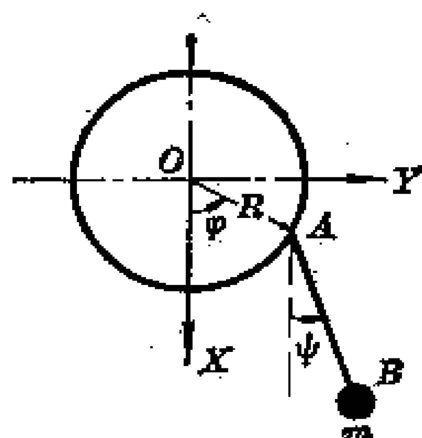
4-9　一车在斜面上无滑动地滚动，斜面与水平面成角α。同时另一圆柱体在车板(与斜面平行)上无滑动地滚动，圆柱体母线与车板的最大斜坡线相垂直。车的质量(车轮除外)是M，所有车轮的总质量是m，圆柱体质量是M_1，设车轮皆为均质密实圆盘。试求车的加速度。

答：小车质心坐标x，圆柱体相对小车转角φ，

$$\ddot{x}=\frac{6M+6m+2M_1}{6M+9m+2M_1}g\sin\alpha$$



题 4-9 题

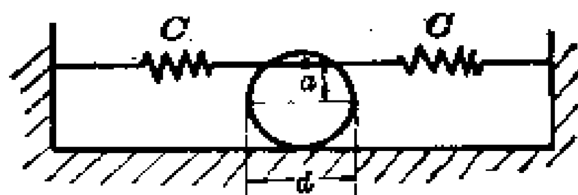


题 4-10 图

4-10 一均质圆盘半径为R，质量为M，可绕其自身水平轴O转动。在圆盘的圆周上以长 l 的绳 AB 悬一质量为m的质点。试写出该系统的运动方程。

答：
$$\left(m+\frac{M}{2}\right)R^2\ddot{\varphi}+mRl\cos(\varphi-\psi)\ddot{\psi}$$
$$+mRl\sin(\varphi-\psi)\dot{\psi}^2+mgR\sin\varphi=0$$
$$mRl\cos(\varphi-\psi)\ddot{\varphi}+ml^2\ddot{\psi}$$
$$-mRl\sin(\varphi-\psi)\dot{\varphi}^2+mgl\sin\psi=0$$

4-11 一圆柱直径为d，质量为m，可在水平面上滚而不滑。两刚性系数均为c的相同弹簧联结于圆柱上。联结点在圆柱长度的中点，离轴线为a，两弹簧被固定。求圆柱振动的周期。



题 4-11 图

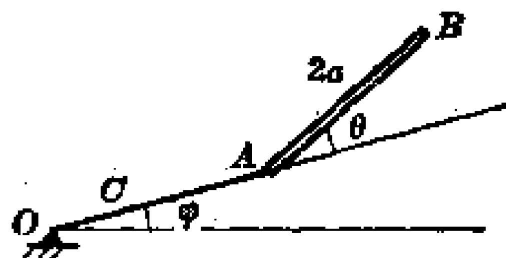
答: $$T=\frac{\pi\sqrt{3}}{1+\frac{2a}{d}}\sqrt{\frac{m}{c}}$$

4-12　作用力具有什么条件，才能将完整系统的拉格朗日方程写成如下形式？

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n)$$

4-13　直接写出习题 4-6 的第一积分，并说明是什么积分？

4-14　直接列写习题 4-8 的第一积分，都是些什么积分？



题 4-15 图

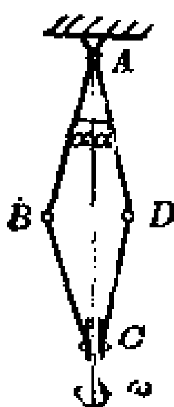
4-15　一匀质杆 AB，长 $2a$，放在光滑水平面上。杆的一端拴于轻的不可伸长的长为 c 的线上。线的另一端被固定在水平面上的点 O。开始时 OAB 共线，而杆在垂直于其长度方向上以速度 v 无转动地抛出。试证杆与线的最大张角的余弦是 $1-\frac{a}{6c}$。

提示：取广义坐标 φ，θ；写出两个第一积分。利用初始条件 $t=0$，$\varphi=\theta=0$，$\dot{\varphi}+\dot{\theta}=0$，$\dot{\varphi}=\frac{v}{c}$ 定积分常数，得到运动的一般方程，在其中取 $\dot{\theta}=0$，即得。

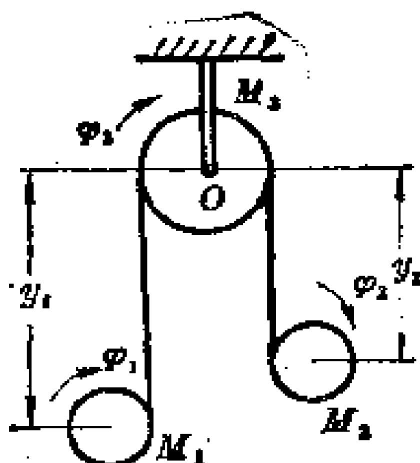
4-16　四根相同的均匀杆，长 $2a$，被光滑地铰接为菱形 $ABCD$。点 A 固定，而点 C 自由地在一通过 A 的光滑铅

垂杆上运动。开始时C与A重合，而整个系统以角速度ω绕铅垂线转动。试证：如果在后续运动中2α是上面两杆的最小夹角，则有

$$a\omega^2\cos\alpha = 3g\sin^2\alpha$$



题 4-16 图



题 4-17 图

4-17　两皮带轮M_1与M_2、质量为m_1与m_2，半径为r_1与r_2，其上绕有绳子，此绳绕过一质量为m_3、半径为r的滑轮M_3；滑轮M_3可无摩擦地绕定轴O转动。假定，绳子与滑轮之间没有滑动而皮带轮中心皆沿铅垂直线运动。求滑轮的角加速度$\ddot{\varphi}_3$及两皮带轮中心的加速度$\ddot{y}_1$，$\ddot{y}_2$。

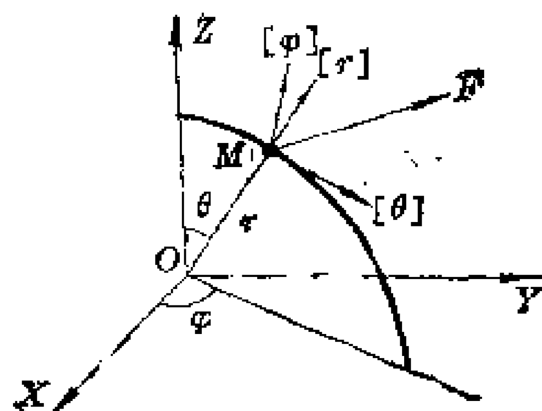
答：

$$\ddot{\varphi}_3 = \frac{m_2 - m_1}{\left(m_1 + m_2 + \frac{3}{2}m_3\right)r_3} g$$

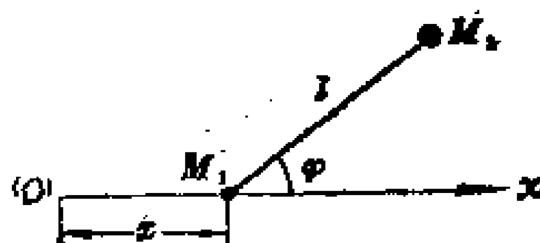
$$\ddot{y}_1 = \frac{3(m_1 + m_3) + m_2}{3\left(m_1 + m_2 + \frac{3}{2}m_3\right)} g$$

$$\ddot{y}_2 = \frac{3(m_2+m_3)+m_1}{3\left(m_1+m_2+\dfrac{3}{2}m_3\right)}g$$

4-18　一自由质点在某力作用下运动，试证：在球坐标中的广义力是1)作用力在矢径方向的投影；2)作用力对Z轴的矩；3)作用力对过坐标原点并垂直于动点所在经线平面的直线的力矩。



题 4-18 图



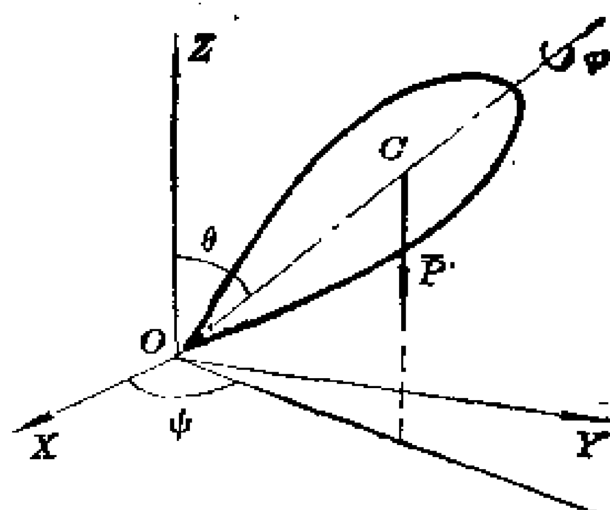
题 4-19 图

4-19　一质量为m_1的质点M_1被限制在水平固定直线OX上无摩擦地滑动；一质量为m_2的质点M_2用一质量可以忽略的长l的杆和前一质点相联，此杆仅能在通过该固定直线的铅垂平面内运动。如此二质点仅受重力作用，求此系统的拉格朗日函数。

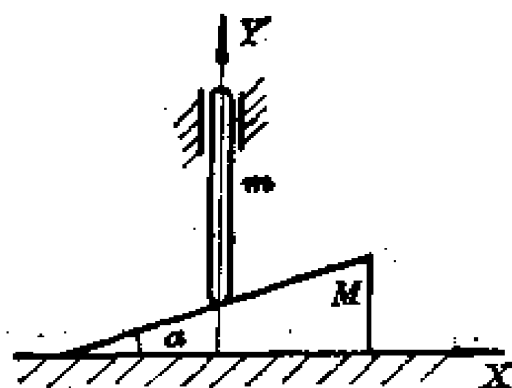
4-20　试写出按牛顿定律(相互引力为$\frac{fm_1m_2}{r^2}$，f为常数。m_1、m_2为质量，r为两点间的距离)相互吸引的两自由质点$M_1(x_1,y_1,z_1)$及$M_2(x_2,y_2,z_2)$的拉格朗日函数（用

直角坐标表示）。

4-21　一对称陀螺支在固定支座上并且仅受重力作用，广义坐标取为：陀螺自转角φ，章动角θ及进动角ψ。试建立它的拉格朗日函数。设陀螺主转动惯量（对点O）为A，A，C。



题 4-21 图



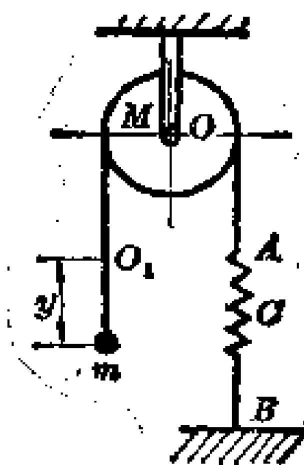
题 4-22 图

4-22　质量为m的直杆可以自由地在固定套管中移动，杆下端搁在质量为M的绝对光滑的尖劈上，而尖劈置于绝对光滑的水平面上。由于杆子的压力，尖劈向水平方向移动。试求两物体的加速度。

答：　杆 $\ddot{y}=-\dfrac{mg}{m+M\operatorname{ctg}\alpha}$

劈 $\ddot{x}=-\ddot{y}\operatorname{ctg}\alpha$

4-23　一滑轮可绕水平轴O转动，在此滑轮上绕过一条不可伸长的绳，绳的一端悬质量为m的重物，另一端A固结



题 4-23 图

一铅垂的弹簧，弹簧的B端固定不动。弹簧张力与其伸长成比例，比例常数为c（即刚性系数）。已知滑轮质量为M并分布于轮缘上，而绳子与滑轮之间无滑动，试求重物的振动周期。

答： $T=2\pi\sqrt{\dfrac{M+m}{c}}$

4-24　具有一个自由度的质点在势力场中运动，试由能量守恒定律推导此质点的拉格朗日方程。

4-25　试求由拉格朗日函数$L=t\sqrt{1+x^2}$所决定的点的运动规律。

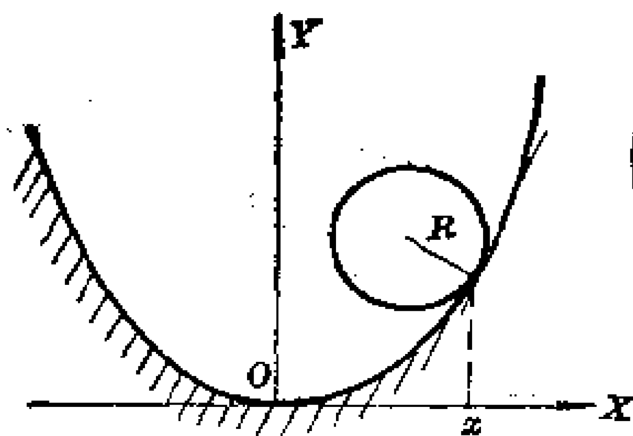
答： $x=c_1\mathrm{arch}\dfrac{t}{c_1}+c_2$

4-26　质量为m的重质点可在铅垂面OXZ内沿曲线$z=f(x)$做无摩擦运动。试建立拉格朗日方程，并求其第一积分。

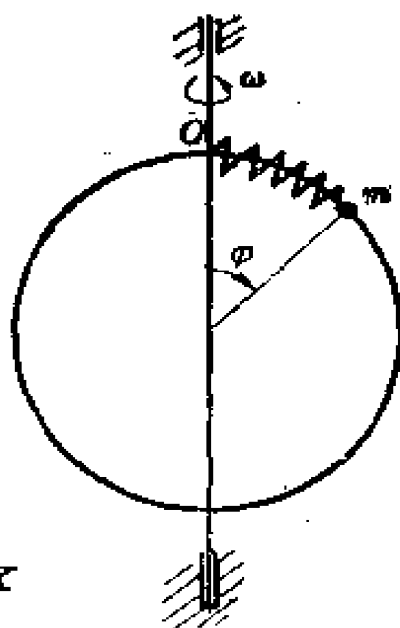
答： $\ddot{x}\left[1+\left(\dfrac{df}{dx}\right)^2\right]+\dfrac{d^2f}{dx^2}\dfrac{df}{dx}\dot{x}^2+\dfrac{df}{dx}g=0$

4-27　半径为R、质量为m的均质圆盘沿抛物线$y=\frac{1}{2}ax^2$无滑动地滚动。轴OY是铅垂的，$Ra\leqslant 1$。取切点横坐标x作为广义坐标，试写出拉格朗日函数。

答：
$$L=\frac{3}{4}m\dot{x}^2\left[\frac{(1+a^2x^2)^{3/2}-aR}{1+a^2x^2}\right]^2-\frac{1}{2}mga\left[x^2+\frac{2R}{a}(1+a^2x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]$$



题 4-27 图



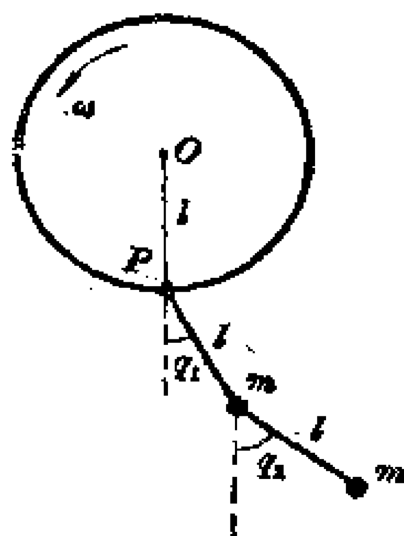
题 4-28 图

4-28　半径为R的光滑金属线圈周以匀角速度ω绕其铅垂直径转动。在圈周上套有质量为m的圆环，圆环用刚度为c的弹簧与圈周上的点O联结，如图所示。弹簧在未变形状态下的长度等于$R\varphi_0$，试以拉格朗日方程形式建立圆环的相对运动微分方程。

答：$L=\frac{1}{2}mR^2(\dot{\varphi}^2+\omega^2\sin^2\varphi)-\frac{1}{2}cR^2(\varphi-\varphi_0)^2$

$-mgR\cos\varphi$

4-29　一圆环以角速度$\sqrt{\frac{ng}{a}}$绕其铅垂直径转动。环上套一小珠，令给小珠以初速度，使它恰可从环的最低点沿环升至最高点，试证质点走完90°所需时间为$\sqrt{\frac{a}{(n+1)g}}\ln[\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}]$。



题 4-30 图

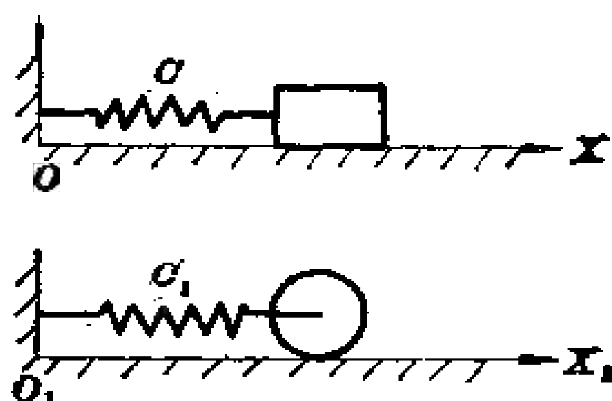
4-30　两个长为 l 的无质量杆在一端都连有质量为m的质点，第一杆铰于圆盘边缘上的点P，第二杆铰接于第一杆，如图所示。圆盘半径为l，以匀角速度ω绕中心转动。设全部运动在水平面内进行，并以q_1和q_2表示相对于OP方向量出的角。试写出系统绝对运动的动能和相对运动的动能。

4-31　某力学系统的广义力Q_s根据等式$Q_s=\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial V}{\partial q_s}(s=1,2,\cdots,n)$由广义势能$V(q_s,\dot{q}_s)$来确定。试证当取广义势能

$$V_1=V(q_s,\dot{q}_s)+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

代替原来势能$V(q_s,\dot{q}_s)$时，力Q_s不变。式中$\psi(q_1,\cdots,q_n,t)$是可微的任意函数。

4-32　用刚度为c的弹簧固定到墙上的、质量为m的重物，沿着粗糙导轨OX滑动，而且滑动摩擦系数等于f。半



题 4 32 图

径为R而质量相同的圆盘，中心用刚度为c_1的弹簧固定到墙上，圆盘沿导轨O_1X_1无滑动地滚动，而且滚动摩擦系数（滚动摩擦力偶臂）等于k。求重物惯性中心和圆盘惯性中心，在同样的初始条件下，作相同的运动时，参数c、c_1、f、k和R之间的关系。

答：$3c=2c_1$，$2k=3fR$

4-33 在光滑水平桌面上，有质量为m的两个质点用一不可伸长的线紧直地连着，线长为a。运动开始时，一质点不动，另一质点有垂直于线方向的速度$\frac{P}{m}$。取一质点的坐标(x, y)及线与其初始位置间的夹角θ为广义坐标，试建立系统的拉格朗日函数，写出运动的第一积分，证明$\dot{\theta}=\frac{P}{ma}$，且两质点各作圆滚线运动。

4-34 某二自由度系统的拉格朗日函数为

$$L=\frac{\dot{q}_1^2}{aq_2+b}+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2+2q_2^2+cq_2$$

其中 a，b，c 为给定常数。试用 Routh 法降阶求解。

答：Routh 方程的积分为

$$\frac{1}{2}\dot{q}_2^2-2q_2^3=\left(c+\frac{\beta^2 a}{4}\right)q_2+c_1,\quad c_1\text{——积分常数。}$$

或

$$\left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2=4(q_2-e_1)(q_2-e_2)(q_2-e_3),\quad e_1+e_2+e_3=0$$

$$e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1=\frac{1}{2}\left(c+\frac{\beta^2 a}{4}\right), e_1e_2e_3=\frac{1}{2}c_1,$$ 因此可

将 q_2 表为魏耳斯特拉斯(Weierstrass)函数

$$q_2=\wp(t+\varepsilon)$$

4-35　带两个自由度的动力系统的拉格朗日函数为 $L=\frac{\dot{q}_2^2}{4q_2}+q_2\dot{q}_1^2+l^2\dot{q}_1^2$。利用能量积分，证明解依赖于 $L'=\left(\frac{q_2'^2}{4q_2}+q_2+l^2\right)^{1/2}$ 之动力学问题的解。利用后一系统的能量积分，证明 q_1，q_2 之间的关系有形式 $Cq_2=\wp(q_1+\varepsilon)-\frac{1}{3}(2Cl^2-1)$，这里 C 及 ε 为积分常数，$\wp$ 为 Weierstrass 椭圆函数。

第五章　拉格朗日方程的应用

这一章研究拉格朗日方程的各种特殊应用，包括有多余坐标系统的拉格朗日方程，准坐标下的拉格朗日方程，耗散函数的拉格朗日方程，打击运动的拉格朗日方程，初始运动问题，相对运动动力学的拉格朗日方程，变质量力学系统的拉格朗日方程，带参数约束系统的拉格朗日方程，包含伺服约束系统的拉格朗日方程等。本章每一节都是一个独立的专门问题。

第一节　有多余坐标系统的拉格朗日方程

1. 有多余坐标系统的拉格朗日方程

设某完整系统的位置由 n 个独立的广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 来确定。为方便计算，我们选 m 个多余坐标 $q_{n+1}, \cdots, q_{n+m}$，这时有 m 个理想完整约束方程

$$f_\gamma(q_1, q_2, \cdots, q_n, q_{n+1}, \cdots, q_{n+m}, t)=0 \qquad (5\text{-}1)$$

$$(\gamma=1,2,\cdots,m)$$

约束(5-1)加在坐标变分上的条件为

$$\sum_{u=1}^{n+m} \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_u}\delta q_u=0 \quad (\gamma=1,2,\cdots,m) \qquad (5\text{-}2)$$

如果用 $q_1, q_2, \cdots, q_{n+m}$ 来代替直角坐标，则动力学普遍方程(4-19)可写成形式

$$\sum_{u=1}^{n+m}\left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_u}+\frac{\partial T}{\partial q_u}+Q_u\right)\delta q_u=0 \qquad (5-3)$$

为由(5-2)、(5-3)导出有多余坐标的完整系统的动力学方程，我们应用拉格朗日乘子法。将(5-2)中的每一个乘上相应的乘子 λ_γ，并对 γ 求和，然后与(5-3)相加，得到

$$\sum_{u=1}^{n+m}\left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_u}+\frac{\partial T}{\partial q_u}+Q_u+\sum_{\gamma=1}^{m}\lambda_\gamma\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_u}\right)\delta q_u=0$$

$$(5-4)$$

我们这样来选取 m 个乘子 λ_γ 使得 $\delta q_{n+1}, \cdots, \delta q_{n+m}$ 前的系数为零，即

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+\rho}}+\frac{\partial T}{\partial q_{n+\rho}}+Q_{n+\rho}+\sum_{\gamma=1}^{m}\lambda_\gamma\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_{n+\rho}}=0$$

$$(\rho=1,2,\cdots,m) \qquad (5-5)$$

于是(5-4)成为

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\partial T}{\partial q_s}+Q_s+\sum_{\gamma=1}^{m}\lambda_\gamma\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_s}\right)\delta q_s=0$$

而由 δq_s 的独立性，得到

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\partial T}{\partial q_s}+Q_s+\sum_{\gamma=1}^{m}\lambda_\gamma\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_s}=0 \qquad (5-6)$$

$$(s=1,2,\cdots,n)$$

方程(5-5)和(5-6)合并为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_u}-\frac{\partial T}{\partial q_u}=Q_u+\sum_{\gamma=1}^{m}\lambda_\gamma\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_u} \qquad (5-7)$$

$$(u=1,2,\cdots,n+m)$$

这就是有多余坐标的完整系统的拉格朗日方程。方程(5-7)与约束方程(5-1)联合，可确定 $n+m$ 个广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_{n+m}$ 和 m 个乘子 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$。

2. 完整约束反力的确定

方程(5-7)右边第二项，实际上是与约束(5-1)相关的约束反力的广义分量，记作

$$R_u=\sum_{\gamma=1}^{m}\lambda_\gamma\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_u}\quad(u=1,2,\cdots,n+m)\qquad(5\text{-}8)$$

如果能从方程(5-7)和(5-1)中求得 λ_γ，则由(5-8)可确定出约束反力。

3. 例题

例 1. 图 5-1 为某测振仪的示意图，系统处于铅垂面内。圆球 A 的质量为 m，不计各杆质量。令 $bc>(a-b)^2$，试求系统在铅垂位置附近作微振动的周期。

解： 系统的动能，即球的动能为

$$T=\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}J_A\omega^2$$

$$=\frac{1}{2}m[\dot{x}^2+(x+c)^2\dot{\varphi}^2]$$

$$+\frac{1}{2}J_A\dot{\varphi}^2\qquad(5\text{-}9)$$

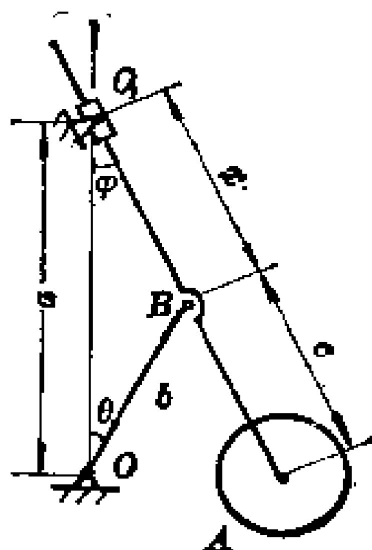


图 5-1

以过点 O 的水平面为基准面，则势能为

$$V=mg[a-(x+c)\cos\varphi]\qquad(5\text{-}10)$$

坐标 x,φ 之间存在一个关系

$$f(x,\varphi)=a^2+x^2-2ax\cos\varphi-b^2=0\qquad(5\text{-}11)$$

如果应用第二类拉格朗日方程(4-21)，必须借助(5-10)

在T中消去x，$\dot{x}$(或$\varphi,\dot{\varphi}$)，在V中消去x(或φ)，仅保留φ，$\dot{\varphi}$(或$x,\dot{x}$)。然而，这样做并不方便。于是，我们保留一个多余坐标，把φ和x同时取作坐标。有多余坐标的完整系统的拉格朗日方程(5-7)给出

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=-\frac{\partial V}{\partial\varphi}+\lambda\frac{\partial f}{\partial\varphi}\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial T}{\partial x}=-\frac{\partial V}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}\end{aligned}\right\}\tag{5-12}$$

将T,V,f代入(5-12)，得到

$$m(x+c)^2\ddot{\varphi}+2m(x+c)\dot{x}\dot{\varphi}+J_A\ddot{\varphi}=-mg(x+c)\sin\varphi+2\lambda ax\sin\varphi\tag{5-13}$$

$$m\ddot{x}-m(x+c)\dot{\varphi}^2=mg\cos\varphi+2\lambda(x-a\cos\varphi)\tag{5-14}$$

方程(5-13)、(5-14)与约束方程(5-11)联立，可解出φ,x以及λ。

对微振动情形，有

$$\sin\varphi\approx\varphi,\qquad\cos\varphi\approx1\tag{5-15}$$

于是，(5-11)成为

$$a^2+x^2-2ax-b^2=0$$

即

$$x=a-b\tag{5-16}$$

将(5-15)、(5-16)代入(5-13)、(5-14)，并忽略高阶小量，得到

$$\left.\begin{aligned}[m(a-b+c)^2+J_A]\ddot{\varphi}=-mg(a-b+c)\varphi+2\lambda a(a-b)\varphi\\ 0=mg-2\lambda b\end{aligned}\right\}$$

由此二式中消去λ，最后得到

$$[m(a-b+c)^2+J_A]\ddot{\varphi}+mg\left[c-\frac{(a-b)^2}{b}\right]\varphi=0\tag{5-17}$$

因假设 $bc>(a-b)^2$，所以 φ 前系数为正值，这个方程就成为测振仪在铅垂位置附近作微振动的微分方程。由此得出测振仪的微振动周期

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{b[m(a-b+c)^2+J_A]}{mg[bc-(a-b)^2]}} \tag{5-18}$$

例2. 一质量为 m 的小珠自由地在一光滑螺线上运动，螺线方程在柱坐标下写成 $r=a$，$z=b\psi$，重力作用在 z 的正向。质点在点 $r=x,\psi=0,z=0$ 处由静止开始运动。试确定螺旋加给小珠的反力的 z 分量和 ψ 分量。

解： 小珠动能在柱坐标 r,ψ,z 中表为

$$T=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}mr^2\dot{\psi}^2+\frac{1}{2}m\dot{z}^2 \tag{5-19}$$

小珠所受完整约束为

$$r-a=0,\quad z-b\psi=0 \tag{5-20}$$

系统是一个自由度的完整系统。如果取 z 为广义坐标，则动能为

$$T=\frac{1}{2}m\frac{a^2+b^2}{b^2}\dot{z}^2 \tag{5-21}$$

广义力为

$$Q_z=mg \tag{5-22}$$

第二类拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}-\frac{\partial T}{\partial z}=Q_z \tag{5-23}$$

将(5-21)、(5-22)代入(5-23)，我们得到

$$m\frac{a^2+b^2}{b^2}\ddot{z}=mg \tag{5-24}$$

利用初始条件 $t=0$，$z=0$，$\dot{z}=0$，我们有

$$z = \frac{gb^2t^2}{2(a^2+b)} \tag{5-25}$$

将(5-25)代入(5-20)，我们得到

$$\psi = \frac{gbt^2}{2(a^2+b^2)} \tag{5-26}$$

然而上述过程并没有求出约束反力来。为确定约束反力，我们取 z 和 ψ 为广义坐标，动能写成

$$T = \frac{1}{2}ma^2\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 \tag{5-27}$$

对约束(5-20)引入不定乘子 λ，有多余坐标的拉格朗日方程(5-7)给出

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial T}{\partial z} &= Q_z + \lambda \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= Q_\psi - \lambda b \end{aligned}\right\} \tag{5-28}$$

广义力为

$$\left.\begin{aligned} Q_z &= mg \\ Q_\psi &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5-29}$$

将(5-27)、(5-29)代入(5-28)，得到

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{z} &= mg + \lambda \\ ma^2\ddot{\psi} &= -\lambda b \end{aligned}\right\} \tag{5-30}$$

如在(5-30)中消去 λ，可得到前面的结果(5-24)。由(5-30)和(5-20)，解得

$$\lambda = -\frac{mga^2}{a^2+b^2} \tag{5-31}$$

于是，约束反力的广义分量为

$$\left.\begin{aligned} R_z &= -\frac{mga^2}{a^2+b^2} \\ R_\psi &= \frac{mga^2b}{a^2+b^2} \end{aligned}\right\} \tag{5-32}$$

设螺线反力分量为 F_z, F_ψ，则有

$$\left.\begin{aligned} F_z &= R_z = -\frac{mga^2}{a^2+b^2} \\ F_\psi &= \frac{R_\psi}{r} = \frac{mgab}{a^2+b^2} \end{aligned}\right\} \tag{5-33}$$

第二节　准坐标下的拉格朗日方程

1. 准速度与准坐标

在力学系统中，引用准坐标的概念和记号是有重要意义的。正如近代力学家 Synge 所说："从单纯技术观点和数学语言上看，准坐标应予极大注意，因为数学的发展给出许多例子，某个想法的发展和新的事实的获得常常是依赖于引进恰当记号的。"

(1)　准速度

设力学系统的位形由 n 个独立的广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 来确定。在研究点的速度时，在不少情况下不是直接由广义速度 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n$ 而是用它们的某些线性形式来确定：

$$\omega_s = \sum_{k=1}^{n} a_{sk}\dot{q}_k \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{5-34}$$

其中系数 a_{sk} 依赖于广义坐标。

量 ω_s 称为准速度。例如，在刚体绕定点转动问题中，可以选角速度矢量在与刚体相固联的轴上的投影为准速度，即

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi \\ \omega_2 &= -\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ \omega_3 &= \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{5-35}$$

这样，最重要的动力学量，如动能、动量矩矢的投影等等，用准速度表示就变得非常简单。

由方程(5-34)可解出广义速度

$$\dot{q}_r=\sum_{s=1}^{n} b_{rs}\omega_s \quad (r=1,2,\cdots,n) \tag{5-36}$$

其中 b_{rs} 为矩阵$[a_{sk}]$的逆矩阵元素。

(2) 准坐标

与(5-34)相关，我们研究广义坐标微分的线性形式

$$d\pi_s=\sum_{k=1}^{n} a_{sk}dq_k \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{5-37}$$

量 $d\pi_s$ 称为准坐标的微分。因为关系(5-35)一般是不可积分的，故量 π_s 作为坐标的函数是不存在的。但是，纯粹条件地引出记号 π_s，并称之为准坐标仍不失去意义，因为这样可以简化公式并减少文字记述。

我们引用记号

$$\omega_s=\dot{\pi}_s \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{5-38}$$

其中 $\dot{\pi}_s$ 乃是引出的记号并非 π_s 对时间的导数。如果表达式(5-34)或(5-37)是可积分的，那么归结为

$$\pi_s=\pi_s(q_1,q_2,\cdots,q_n) \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{5-39}$$

这只表明过渡到新的广义坐标。因此，准坐标的概念实际上比广义坐标的概念更广泛。

下面给出"对准坐标 π_s 的偏导数"运算。设 $\varphi(q_1,q_2,\cdots,q_n)$是广义坐标的函数。对$\varphi$求全微分，并利用(5-36)、(5-37)，则有

$$d\varphi=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial q_r}dq_r=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial q_r}\sum_{s=1}^{n}b_{rs}d\pi_s$$

$$= \sum_{r=1}^{n} d\pi_s \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial q_r} b_{rs}$$

因此，自然可定义φ对π_s的偏导数为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \pi_s} = \sum_{r=1}^{n} b_{rs} \frac{\partial \varphi}{\partial q_r} \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{5-40}$$

对系统中点的矢径$\boldsymbol{r}_i$ $(i=1,2,\cdots,N)$来说，类似于(5-40)，有

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_s} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_l} b_{ls} \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{5-41}$$

点的速度矢量$\boldsymbol{v}_i$用准速度表为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_i = \dot{\boldsymbol{r}}_i &= \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \\ &= \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \sum_{k=1}^{n} b_{sk} \omega_k + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_k} \omega_k + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \end{aligned} \tag{5-42}$$

因此得到

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \omega_s} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_s} \tag{5-43}$$

与关系(5-40)、(5-41)相反的关系分别为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_r} = \sum_{k=1}^{n} a_{kr} \frac{\partial \varphi}{\partial \pi_k} \quad (r=1,2,\cdots,n) \tag{5-44}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_r} = \sum_{k=1}^{n} a_{kr} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \pi_k} \quad (r=1,2,\cdots,n) \tag{5-45}$$

由关系(5-40)知，存在运算

$$\frac{\partial}{\partial \pi_s} = \sum_{r=1}^{n} b_{rs} \frac{\partial}{\partial q_r} \tag{5-46}$$

运算(5-46)在简化公式上起重要作用。

2. 准坐标下的拉格朗日方程

理想、完整系统的拉格朗日方程为(4-21)，即

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s \quad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (5\text{-}47)$$

现在由方程(5-48)导出准坐标下的拉格朗日方程。

令准速度与广义速度的关系用(5-34)、(5-36)表示。将(5-47)的每个方程乘以$\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_k}=b_{sk}$并对 s 求和，得到

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}b_{sk}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_s}b_{sk}=\sum_{s=1}^{n}Q_s b_{sk} \qquad (5\text{-}48)$$

令 T^* 为用准速度表示的动能，即

$$T^*(q_s,\omega_s,t)=T\left(q_s,\ \sum_{k=1}^{n}b_{sk}\omega_k,t\right)$$

$$T(q_s,\dot{q}_s,t)=T^*\left(q_s,\ \sum_{k=1}^{n}a_{sk}\dot{q}_k,t\right)$$

我们有

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_l}\frac{\partial \omega_l}{\partial \dot{q}_s}=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_l}a_{ls} \qquad (5\text{-}49)$$

因此

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}b_{sk}=\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_l}a_{ls}b_{sk}$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_l}\dot{a}_{ls}b_{sk} \qquad (5\text{-}50)$$

又因

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{n}c_{ls}b_{sk}=\delta_{lk}\\&\dot{a}_{ls}=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial a_{ls}}{\partial q_r}\dot{q}_r=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial a_{ls}}{\partial q_r}\sum_{m=1}^{n}b_{rm}\omega_m\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}51)$$

将(5-51)代入(5-50)，得到

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}b_{sk}=\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}$$
$$+\sum_{m=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_l}\frac{\partial a_{ls}}{\partial q_r}b_{rm}b_{sk}\omega_m \qquad (5\text{-}52)$$

又

$$\frac{\partial T}{\partial q_s}=\frac{\partial T^*}{\partial q_s}+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_l}\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial a_{lr}}{\partial q_s}\sum_{m=1}^{n}b_{rm}\omega_m$$

故方程(5-48)的第二式为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_s}b_{sk}=\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial T^*}{\partial q_s}+\sum_{l=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_l}\frac{\partial a_{lr}}{\partial q_s}b_{rm}\omega_m\right]b_{sk}$$

注意到(5-46)，上式可写成

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_s}b_{sk}=\frac{\partial T^*}{\partial \pi_k}+\sum_{m=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_l}\frac{\partial a_{lr}}{\partial q_s}$$
$$\cdot b_{rm}b_{sk}\omega_m \qquad (5\text{-}53)$$

最后，将(5-52)和(5-53)代入(5-48)，我们得到

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}+\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\gamma_{mk}^{l}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_l}\omega_m-\frac{\partial T^*}{\partial \pi_k}=P_k^*$$
$$(k=1,2,\cdots,n) \qquad (5\text{-}54)$$

其中

$$\gamma_{mk}^{l}=\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{ls}}{\partial q_r}-\frac{\partial a_{lr}}{\partial q_s}\right)b_{rm}b_{sk} \qquad (5\text{-}55)$$

为波兹曼(Boltzmann)三标记号，而

$$P_k^*=\sum_{s=1}^{n}Q_s b_{sk} \qquad (5\text{-}56)$$

为相应于准坐标的广义力。

方程(5-54)就是准坐标下的拉格朗日方程，是德国学者 Boltzmann 于 1902 年得到的。

3. 例题

例1. 一质量为 m 的质点 p 在指向定点 O 的有心力作用下在一平面内运动。力的大小为 $f(r)$，其中 r 为 O 和 p 之间的距离。试导出质点在变量 r，θ，$\dot{r}$ 和 $\dot{A}$ 下的运动方程，其中 r，θ 为点的极坐标，$\dot{A}$ 是面积速度。

解：取广义坐标 q_1，q_2 和准速度 ω_1，ω_2，为

$$\left.\begin{aligned} &q_1=r,\ \ \omega_1=\dot{r} \\ &q_2=\theta,\ \ \omega_2=\dot{A}=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta} \end{aligned}\right\} \tag{5-57}$$

于是

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}=1,\ \ a_{12}=0,\ \ a_{21}=0,\ \ a_{22}=\frac{r^2}{2} \\ &b_{11}=1,\ \ b_{12}=0,\ \ b_{21}=0,\ \ b_{22}=\frac{2}{r^2} \end{aligned}\right\} \tag{5-58}$$

按公式(5-55)计算波兹曼三标记号，我们有

$$\gamma_{12}^2=-\gamma_{21}^2=\frac{2}{r} \tag{5-59}$$

其余的全为零。

质点的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$$

于是有

$$T^*=\frac{1}{2}m\left(\omega_1^2+\frac{4\omega_2^2}{r^2}\right)$$

而

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T^*}{\partial \omega_1}=m\omega_1,\ \ \frac{\partial T^*}{\partial \omega_2}=\frac{4m\omega_2}{r^2} \\ &\frac{\partial T^*}{\partial \pi_1}=\sum_{s=1}^{2}\frac{\partial T^*}{\partial q_s}b_{s1}=-\frac{4m\omega_2^2}{r^3},\ \ \frac{\partial T^*}{\partial \pi_2}=\sum_{s=1}^{2}\frac{\partial T^*}{\partial q_s}b_{s2}=0 \end{aligned}\right\} \tag{5-60}$$

又

$$\left.\begin{aligned} P_1^* &= \sum_{s=1}^{2} Q_s b_{s1} = Q_1 = f(r) \\ P_2^* &= \sum_{s=1}^{2} Q_s b_{s2} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5-61}$$

方程(5-54)给出

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_1} + \sum_{l=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}\gamma_{m1}^{l}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_l}\omega_m - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_1} = P_1^* \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_2} + \sum_{l=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}\gamma_{m2}^{l}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_l}\omega_m - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_2} = P_2^* \end{aligned}\right\} \tag{5-62}$$

将(5-59)、(5-60)和(5-61)代入(5-62)，我们得到

$$\frac{d}{dt}(m\omega_1) - \frac{8m\omega_2^2}{r^3} + \frac{4m\omega_2^2}{r^3} = f(r)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{4m\omega_2}{r^2}\right) + \frac{8m\omega_2^2}{r^3} = 0$$

即

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{r} - \frac{4m\dot{A}^2}{r^3} = f(r) \\ \ddot{A} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5-63}$$

方程(5-63)即为所求运动方程，由此得知，$\dot{A}$ 是一个常数。

例2. 试由方程(5-54)导出刚体绕定点转动的欧拉动力学方程。

解： 取刚体角速度沿固定点处刚体的惯性主轴的投影为准速度，则

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi \\ \omega_2 &= -\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ \omega_3 &= \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{5-64}$$

由此反解出广义速度$\dot\psi$，$\dot\theta$，$\dot\varphi$，则

$$\left.\begin{aligned}\dot\psi&=\omega_1\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}+\omega_2\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\\ \dot\theta&=\omega_1\cos\varphi-\omega_2\sin\varphi\\ \dot\varphi&=-\omega_1\sin\varphi\operatorname{ctg}\theta-\omega_2\cos\varphi\operatorname{ctg}\theta+\omega_3\end{aligned}\right\}\tag{5-65}$$

令$q_1=\psi$，$q_2=\theta$，$q_3=\varphi$，则

$$[a_{sk}]=\begin{bmatrix}\sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ \sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \cos\theta & 0 & 1\end{bmatrix}\tag{5-66}$$

$$[b_{sk}]=\begin{bmatrix}\dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta} & \dfrac{\cos\varphi}{\sin\theta} & 0\\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi\operatorname{ctg}\theta & -\cos\varphi\operatorname{ctg}\theta & 1\end{bmatrix}\tag{5-67}$$

刚体的动能为 $$T^*=\frac{1}{2}(A\omega_1^2+B\omega_2^2+C\omega_3^2)$$

其中A，B，C是主转动惯量。因此

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial T^*}{\partial\omega_1}=A\omega_1,\quad\frac{\partial T^*}{\partial\omega_2}=B\omega_2,\quad\frac{\partial T^*}{\partial\omega_3}=C\omega_3\\ &\frac{\partial T^*}{\partial\pi_1}=\frac{\partial T^*}{\partial\pi_2}=\frac{\partial T^*}{\partial\pi_3}=0\end{aligned}\right\}\tag{5-68}$$

现在计算波兹曼三标记号。因$b_{13}=b_{23}=0$，$a_{13}=a_{23}=0$，故

$$\begin{aligned}\gamma_{23}^1=-\gamma_{32}^1&=\sum_{s=1}^{3}\sum_{r=1}^{3}\left(\frac{\partial a_{1s}}{\partial q_r}-\frac{\partial a_{1r}}{\partial q_s}\right)b_{r2}b_{s3}\\ &=\sum_{r=1}^{3}\left(\frac{\partial a_{13}}{\partial q_r}-\frac{\partial a_{1r}}{\partial q_3}\right)b_{r2}b_{33}\\ &=-\frac{\partial a_{11}}{\partial q_3}b_{12}b_{33}-\frac{\partial a_{12}}{\partial q_3}b_{22}b_{33}\end{aligned}$$

$$=-\sin\theta\cos\varphi\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}+\sin\varphi(-\sin\varphi)=-1$$

类似地，计算得

$$\gamma^2_{31}=-\gamma^2_{13}=-1,\qquad \gamma^3_{12}=-\gamma^3_{21}=-1$$

其余的全为零。将这些系数及(5-68)代入方程(5-54)，得到

$$A\dot{\omega}_1+\gamma^3_{21}C\omega_3\cdot\omega_2+\gamma^2_{31}B\omega_2\cdot\omega_3=P^*_1$$

$$B\dot{\omega}_2+\gamma^2_{12}C\omega_3\cdot\omega_1+\gamma^1_{32}A\omega_1\cdot\omega_3=P^*_2$$

$$C\dot{\omega}_3+\gamma^2_{13}B\omega_2\cdot\omega_1+\gamma^1_{23}A\omega_1\cdot\omega_2=P^*_3$$

即

$$\left.\begin{aligned}A\dot{\omega}_1-(B-C)\omega_2\omega_3=P^*_1\\ B\dot{\omega}_2-(C-A)\omega_3\omega_1=P^*_2\\ C\dot{\omega}_3-(A-B)\omega_1\omega_2=P^*_3\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}69)$$

其中 P^*_1，P^*_2，P^*_3 为力矩的分量。方程(5-69)就是著名的欧拉动力学方程。

第三节　耗散函数的拉格朗日方程

质点在介质中运动时，常常受到介质的阻力作用。阻力的大小一般和速度及坐标有关，方向和速度方向相反。这一节我们研究有介质阻力时的拉格朗日方程。

1.　在介质中缓慢运动的拉格朗日方程

在质点的速度不大时，阻力的大小和速度成正比，方向和速度方向相反。这种阻力叫粘性阻力。当质点受到粘性阻力作用时，质点 m_i 按牛顿定律，运动微分方程为

$$\left.\begin{aligned}m_i\ddot{x}_i=-k_{ix}\dot{x}_i+F_{ix}\\ m_i\ddot{y}_i=-k_{iy}\dot{y}_i+F_{iy}\\ m_i\ddot{z}_i=-k_{iz}\dot{z}_i+F_{iz}\end{aligned}\right\}(i=1,2,\cdots,N)\qquad(5\text{-}70)$$

其中 F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} 是作用于质点的除介质阻力以外的合力的分量。将(5-70)分别乘以$\frac{\partial x_i}{\partial q_s}$, $\frac{\partial y_i}{\partial q_s}$, $\frac{\partial z_i}{\partial q_s}$，并对整个质点系的方程求和，得

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+\ddot{y}_i\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+\ddot{z}_i\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{N}\left(k_{ix}\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+k_{iy}\dot{y}_i\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+k_{iz}\dot{z}_i\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right) \qquad (5\text{-}71)$$

按照第四章第一节中(4-17)及(4-18)，我们有

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+\ddot{y}_i\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)=Q_s$$

因此，(5-71)成为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=-\sum_{i=1}^{N}\left(k_{ix}\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+k_{iy}\dot{y}_i\frac{\partial y_i}{\partial q_s}\right.$$

$$\left.+k_{iz}\dot{z}_i\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)+Q_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (5\text{-}72)$$

其中 Q_s 为除阻力外的作用力之广义力。

利用经典拉格朗日关系(4-8)，有

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_s}=\frac{\partial x_i}{\partial q_s},\quad \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_s}=\frac{\partial y_i}{\partial q_s},\quad \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_s}=\frac{\partial z_i}{\partial q_s}$$

所以

$$-\sum_{i=1}^{N}\left(k_{ix}\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+k_{iy}\dot{y}_i\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+k_{iz}\dot{z}_i\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{N}\left(k_{ix}\dot{x}_i\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial\dot{q}_s}+k_{iy}\dot{y}_i\frac{\partial\dot{y}_i}{\partial\dot{q}_s}+k_{iz}\dot{z}_i\frac{\partial\dot{z}_i}{\partial\dot{q}_s}\right)$$

$$=-\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}k_{ix}\dot{x}_i^2+k_{iy}\dot{y}_i^2+k_{iz}\dot{z}_i^2)\right]$$

瑞雷(Rayleigh)引入下列函数

$$F=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(k_{ix}\dot{x}_i^2+k_{iy}\dot{y}_i^2+k_{iz}\dot{z}_i^2) \tag{5-73}$$

这个函数称为瑞雷耗散函数。于是(5-72)成为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=-\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_s}+Q_s\quad(s=1,2,\cdots,n) \tag{5-74}$$

方程(5-74)就是双面、理想、完整约束系统在介质中缓慢运动的拉格朗日方程。

2. 耗散函数的力学意义

为了说明耗散函数的力学意义，我们将(5-74)两端乘以 $\dot{q}_s$ 并对 s 求和，得

$$\sum_{s=1}^{N}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\right)\cdot\dot{q}_s-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_s}\cdot\dot{q}_s=-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_s}\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}Q_s\dot{q}_s \tag{5-75}$$

假定力学系统是完全稳定的，那么动能是广义速度的齐二次函数，于是

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\right)\dot{q}_s-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_s}\dot{q}_s$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\dot{q}_s\right)-\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\ddot{q}_s\right)$$

$$=\frac{d}{dt}(2T)-\frac{dT}{dt}=\frac{dT}{dt} \tag{5-76}$$

再假定广义力具有势能函数，那么

$$\sum_{s=1}^{n} Q_s\dot{q}_s = -\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_s}\dot{q}_s = -\frac{dV}{dt} \tag{5-77}$$

将(5-76)、(5-77)代入(5-75)，便得

$$\frac{dT}{dt} = -\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s - \frac{dV}{dt} \tag{5-78}$$

因F是$\dot{x}_i$，$\dot{y}_i$，$\dot{z}_i$的齐二次函数，对完全稳定的力学系统它也是广义速度$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n$的齐二次函数。所以按齐次函数的欧拉定理，有

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s = 2F$$

于是，(5-78)成为

$$\frac{d(T+V)}{dt} = -2F \tag{5-79}$$

$$E = T + V = -\int 2F\,dt + \text{const} \tag{5-80}$$

由(5-79)知，$2F$乃是这个力学系统在单位时间内减少的机械能。

3. 例题

某二自由度的力学系统，其动能、势能和耗散函数的表达式分别为

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \quad V = \frac{1}{2}(\lambda_1 q_1^2 + \lambda_2 q_2^2),$$

$$F = \frac{1}{2}(a\dot{q}_1^2 + 2h\dot{q}_1\dot{q}_2 + b\dot{q}_2^2)$$

其中$\lambda_1>0, \lambda_2>0$。试求此系统的运动。

解：由(5-74)知力学系统的方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}+\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\partial V}{\partial q_s}=0 \quad (s=1,2)$$

成为

$$\left.\begin{aligned}\ddot{q}_1+a\dot{q}_1+h\dot{q}_2+\lambda_1 q_1=0\\ \ddot{q}_2+h\dot{q}_1+b\dot{q}_2+\lambda_2 q_2=0\end{aligned}\right\} \tag{5-81}$$

为了求(5-81)的特解，用以下两式作试解：

$$q_1=Ae^{pt}, \quad q_2=Be^{pt} \tag{5-82}$$

将(5-82)代入(5-81)，得

$$\left.\begin{aligned}A(p^2+ap+\lambda_1)+Bhp=0\\ Ahp+B(p^2+bp+\lambda_2)=0\end{aligned}\right\} \tag{5-83}$$

由(5-83)知A，B不为零的解存在的条件是

$$\begin{vmatrix} p^2+ap+\lambda_1 & hp \\ hp & p^2+bp+\lambda_2 \end{vmatrix}=0$$

或 $\quad (p^2+ap+\lambda_1)(p^2+bp+\lambda_2)-h^2p^2=0$

或 $\quad p^4+(a+b)p^3+(\lambda_1+\lambda_2+ab-h^2)p^2$

$$+(\lambda_1 b+\lambda_2 a)p+\lambda_1\lambda_2=0$$

假设耗散力比较小，因而可忽略a、h、b的二次项，那么上式的解为

$$p_1=i\sqrt{\lambda_1}-\frac{a}{2}, \qquad p_2=i\sqrt{\lambda_2}-\frac{b}{2}$$

其中$i=\sqrt{-1}$（当然还有与p_1，p_2相共轭的根，但不影响最后的结果）。

将p_1代入(5-83)第二式，并略去二阶小量，得

$$\frac{B}{A}=\frac{ih\sqrt{\lambda_1}}{\lambda_1-\lambda_2}$$

所以由(4-83)得微分方程的特解为

$$q_1=(\lambda_1-\lambda_2)e^{(i\sqrt{\lambda_1}-\frac{a}{2})t}$$
$$=(\lambda_1-\lambda_2)e^{-\frac{a}{2}t}(\cos\sqrt{\lambda_1}t+i\sin\sqrt{\lambda_1}t)$$
$$q_2=ih\sqrt{\lambda_1}\,e^{(i\sqrt{\lambda_1}-\frac{a}{2})t}$$
$$=h\sqrt{\lambda_1}\,e^{-\frac{a}{2}t}(i\cos\sqrt{\lambda_1}t-\sin\sqrt{\lambda_1}t)$$

由以上二式得二独立的实数特解

$$\left.\begin{aligned}q_1&=(\lambda_1-\lambda_2)e^{-\frac{a}{2}t}\cos\sqrt{\lambda_1}t\\q_2&=-h\sqrt{\lambda_1}\,e^{-\frac{a}{2}t}\sin\sqrt{\lambda_1}t\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}q_1&=(\lambda_1-\lambda_2)e^{-\frac{a}{2}t}\sin\sqrt{\lambda_1}t\\q_2&=h\sqrt{\lambda_1}\,e^{-\frac{a}{2}t}\cos\sqrt{\lambda_1}t\end{aligned}\right\}$$

结合以上两组特解，可得到对于 e^{p_1t} 的一组实的通解如下：

$$\left.\begin{aligned}q_1&=(\lambda_1-\lambda_2)Ae^{-\frac{a}{2}t}\sin(\sqrt{\lambda_1}t+\varepsilon)\\q_2&=h\sqrt{\lambda_1}Ae^{-\frac{a}{2}t}\sin(\sqrt{\lambda_1}t+\frac{\pi}{2}+\varepsilon)\end{aligned}\right\}\quad(5\text{-}84)$$

其中A，ε是任意实的常数。(5-84)表示这个振动系统的一个主振型。

将(5-85)与 e^{p_2t} 的解相结合，最终得通解为

$$\left.\begin{aligned}q_1=&(\lambda_1-\lambda_2)Ae^{-\frac{a}{2}t}\sin(\sqrt{\lambda_1}t+\varepsilon)\\&+h\sqrt{\lambda_2}\,Be^{-\frac{b}{2}t}\sin(\sqrt{\lambda_2}t+\frac{\pi}{2}+\gamma)\\q_2=&h\sqrt{\lambda_1}\,Ae^{-\frac{a}{2}t}\sin(\sqrt{\lambda_1}t+\frac{\pi}{2}+\varepsilon)\\&+(\lambda_2-\lambda_1)Be^{-\frac{b}{2}t}\sin(\sqrt{\lambda_2}t+\gamma)\end{aligned}\right\}\quad(5\text{-}85)$$

其中A，B，ε，γ是四个积分常数，由初始条件确定。

(5-85)表明系统振动是衰减振动，这是由于耗散力的存在，使系统的机械能逐渐减小的缘故。主振动的周期与没有耗散力存在时的周期相同，这是由于忽略了 a，h，b 的二阶项才得出的。

4. 路里叶耗散函数

瑞雷耗散函数(5-73)是广义速度的齐二次函数，力学上属于线性阻尼性质。更一般的情况是非线性阻尼。考虑系统的每个质点上作用有和质点速度有关的阻力

$$\boldsymbol{F}_i = -k_i f_i(v_i)\frac{\boldsymbol{v}_i}{v_i} \tag{5-86}$$

其中 v_i 是点的速度大小，k_i 是点的所有坐标的正函数

$$k_i = k_i(x_1, \cdots, x_n,\ y_1, \cdots, y_n,\ z_1, \cdots, z_n) > 0 \tag{5-87}$$

f_i 满足

$$f_i(v_i) > 0 \tag{5-88}$$

与(5-88)相应的广义力为

$$\begin{aligned} Q'_s &= -\sum_{i=1}^{N} k_i f_i(v_i)\frac{\boldsymbol{v}_i}{v_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \\ &= -\sum_{i=1}^{N} k_i f_i(v_i)\cdot\frac{\boldsymbol{v}_i}{v_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_s} \\ &= -\sum_{i=1}^{N} k_i f_i(v_i)\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_s} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\sum_{i=1}^{N} k_i\int_0^{v_i} f(u)du \end{aligned} \tag{5-89}$$

现在定义函数

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} k_i\int_0^{v_i} f_i(u)du \tag{5-90}$$

称之为路里叶(Лурье)耗散函数。于是有

$$Q'_s = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_s} \quad (s = 1, 2, \cdots, n) \tag{5-91}$$

此时拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=-\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_s}+Qs \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{5-92}$$

其中 Q_s 为除阻力外的作用力的广义力。

瑞雷耗散函数是路里叶耗散函数的特例。在路里叶耗散函数中取 $f_i(v_i)=v_i$ 就成为瑞雷耗散函数。

比线性阻尼更为一般的是阻力大小和速度 m 次方成比例的情形，即

$$f(v_i)=v_i^m \tag{5-93}$$

此时

$$\Phi=\frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{N}k_i v_i^{m+1}=\frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{N}k_i\left|\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s\right|^{m+1} \tag{5-94}$$

假定 Q_s 具有势能函数 V，类似于(5-78)，我们有

$$\frac{dT}{dt}=-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-\frac{dV}{dt} \tag{5-95}$$

由(5-94)知

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s=(m+1)\Phi \tag{5-96}$$

将(5-96)代入(5-95)，得到

$$\frac{d(T+V)}{dt}=-(m+1)\Phi \tag{5-97}$$

当 $m=0$ 时为库伦摩擦，$m=1$ 为线性阻尼，等等。

第四节　打击运动的拉格朗日方程

1．打击问题的拉格朗日方程

打击现象是物体的运动速度或动量在很短时间内发生了有限的改变；就转动的打击问题来说，则是动量矩在很短时间内发生了有限的改变。一般地，物体的广义动量发生了有限的变化，物体有此变化的原因是受了巨大的广义力 Q_s，因此时间 Δt 虽然很短，但打击冲量（或称打击力）

$$\int_0^{\Delta t} Q_s dt = I_s \tag{5-98}$$

仍为有限量。将拉格朗日方程(5-98)乘以 dt，然后由 0 至 Δt 积分，得

$$\int_0^{\Delta t} d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) - \int_0^{\Delta t} \frac{\partial T}{\partial q_s} dt = \int_0^{\Delta t} Q_s dt = I_s \tag{5-99}$$

$$(s=1,2,\cdots,n)$$

而 $$\int_0^{\Delta t} d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\bigg|_{t=\Delta t} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\bigg|_{t=0} \tag{5-100}$$

又由中值定理知

$$\int_0^{\Delta t} \frac{\partial T}{\partial q_s} dt \leqslant \left|\frac{\partial T}{\partial q_s}\right|_{\max} \cdot \Delta t$$

因 Δt 很小，$\left|\frac{\partial T}{\partial q_s}\right|_{\max}$ 为有限量，故上式与(5-100)比较可忽略，于是得打击问题的拉格朗日方程为

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\bigg|_{t=\Delta t} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\bigg|_{t=0} = I_s \tag{5-101}$$

$$(s=1,2,\cdots,n)$$

令 $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} = p_s$，所以上式又可表为

$$p_s\Big|_{t=\Delta t} - p_s\Big|_{t=0} = I_s \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{5-101'}$$

方程(5-101)为n个代数方程。

2. 例题

例1. 在铰接平行四边形$ABCD$中，AB与DC杆的质量各为m_1，BC杆的质量为m_2。$\angle BAD=\theta$。AD固定。今于B点作用冲量$\overline{S}$，方向沿BC线(图5-2)。求B点的速度，并求整个系统所得到的动能。

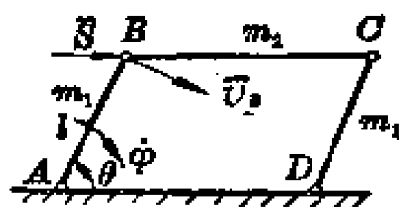


图 5-2

解：此平行四边形机构有一个自由度。设杆AB的角速度为$\dot{\varphi}$，则B点速度为$l\dot{\varphi}$，其中l为杆AB的长度。AB及DC作定轴转动，它们的动能之和为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_1 l^2\right)\dot{\varphi}^2\times 2$$

杆BC作平动，其动能为$\frac{1}{2}m_2(l\dot{\varphi})^2$。故系统的动能为

$$T=\frac{1}{3}m_1 l^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}m_1+m_2\right)l^2\dot{\varphi}^2 \tag{5-102}$$

打击力S的元功为

$$S\cdot\sin\theta\cdot l\delta\varphi$$

故广义打击力为$S\cdot\sin\theta\cdot l$。于是(5-101)给出

$$\left(\frac{2}{3}m_1+m_2\right)l^2\dot{\varphi}=S\cdot\sin\theta\cdot l$$

因此点B的速度为

$$v_B=l\dot{\varphi}=\frac{S\cdot\sin\theta}{\frac{2}{3}m_1+m_2} \tag{5-103}$$

系统所获得的动能为

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}m_1+m_2\right)l^2\dot{\varphi}^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}m_1+m_2\right)\left(\frac{S\cdot\sin\theta}{\frac{2}{3}m_1+m_2}\right)^2=\frac{S^2\cdot\sin^2\theta}{2\left(\frac{2}{3}m_1+m_2\right)}$$

(5-104)

例2. 六条等长均质杆构成一个正六边形，角点用铰链联接。在一边中点垂直地给以打击力(图5-3)，试证明对边将以被打击杆速度的$\frac{1}{10}$而开始运动。

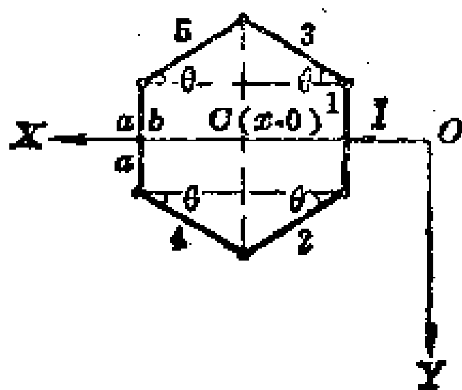


图 5-3

解：我们选打击方向为X轴，六边形中心坐标为(x，0)杆 2，3，4，5 与X轴交角为θ (图5-3)，并取x，θ为广义坐标。设各杆长$2a$，质量为m。

现在计算系统的动能。由对称性知，杆 1 和杆 6 作平动。杆 1 质心坐标为$x_1=x-2a\cos\theta$，$y_1=0$，因此杆 1 的动能为

$$T_1=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2=\frac{1}{2}m(\dot{x}+2a\dot{\theta}\sin\theta)^2$$

类似地得杆 6 的动能为

$$T_6=\frac{1}{2}m\dot{x}_6^2=\frac{1}{2}m(\dot{x}-2a\dot{\theta}\sin\theta)^2$$

杆 2，3，4，5 作平面运动，各杆质心坐标为

$$x_2=x-a\cos\theta=x_3$$

$$y_2=a+a\sin\theta=y_4=-y_3=-y_5$$
$$x_4=x+a\cos\theta=x_5$$

于是 $T_2=\frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)+\frac{1}{2}\frac{1}{3}ma^2\dot{\theta}^2$

$$=\frac{1}{2}m[(\dot{x}+a\dot{\theta}\sin\theta)^2+a^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta]+\frac{1}{2}\frac{1}{3}ma^2\dot{\theta}^2$$
$$=T_3$$
$$T_4=\frac{1}{2}m(\dot{x}_4^2+\dot{y}_4^2)+\frac{1}{2}\frac{1}{3}ma^2\dot{\theta}^2$$
$$=\frac{1}{2}m[\dot{x}-a\dot{\theta}\sin\theta)^2+a^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta]+\frac{1}{2}\frac{1}{3}ma^2\dot{\theta}^2$$
$$=T_6$$

系统的动能为

$$T=\sum_{i=1}^{6}T_i$$
$$=\frac{1}{2}m(\dot{x}+2a\dot{\theta}\sin\theta)^2+m[(\dot{x}+a\dot{\theta}\sin\theta)^2+a^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta]$$
$$+\frac{1}{3}ma^2\dot{\theta}^2+m[(\dot{x}-a\dot{\theta}\sin\theta)^2+a^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta]$$
$$+\frac{1}{3}ma^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m(\dot{x}-2a\dot{\theta}\sin\theta)^2+\frac{1}{2}6m\dot{x}^2$$
$$+4ma^2\dot{\theta}^2\left(\frac{2}{3}+\sin^2\theta\right) \tag{5-105}$$

因此
$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}=8ma^2\dot{\theta}\left(\frac{2}{3}+\sin^2\theta\right)$$
$$\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}=6m\dot{x}$$

设打击力为I，它的元功为

$$I\cdot\delta(x-2a\cos\theta)=I\delta x+2aI\sin\theta\delta\theta \tag{5-106}$$

因此打击运动的拉格朗日方程为

$$\left.\begin{aligned}8ma^2\dot\theta\left[\frac{2}{3}+\sin^2\theta\right]&=2aI\sin\theta\\6m\dot x&=I\end{aligned}\right\} \tag{5-107}$$

这是因为打击前的速度、角速度为零。注意到 $\theta=30°$，由(5-107)求得打击后的速度、角速度分别为

$$\dot x=\frac{I}{6m},\qquad \dot\theta=\frac{3I}{22ma} \tag{5-108}$$

打击后杆 6 的速度与杆 1 的速度之比为

$$\frac{v_6}{v_1}=\frac{\dot x-2a\dot\theta\sin\theta}{\dot x+2a\dot\theta\sin\theta}=\frac{\dot x-a\dot\theta}{\dot x+a\dot\theta}$$

将(5-108)代入上式，便得

$$\frac{v_6}{v_1}=\frac{\left(\frac{1}{6}-\frac{3}{22}\right)\frac{I}{m}}{\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{22}\right)\frac{I}{m}}=\frac{1}{10} \tag{5-109}$$

证毕。

第五节　初始运动问题

一个动力系统的运动微分方程(4-21)，一般说来很难解为已知函数的有限形式。但是总可以用幂级数来解微分方程组，即对独立变量 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 找到形如

$$\left.\begin{aligned}q_1&=a_1+b_1t+c_1t^2+d_1t^3+\cdots\cdots\\q_2&=a_2+b_2t+c_2t^2+d_2t^3+\cdots\cdots\\&\vdots\end{aligned}\right\} \tag{5-110}$$

$$q_n = a_n + b_n t + c_n t^2 + d_n t^3 + \cdots\cdots \Bigr\}$$

的表达式，其中系数 $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n,\cdots$ 可由(5-110)代入方程(4-21)并令 t 的各同次幂的系数为零而得到。一般说来，展开式对 t 平面上某确定的收敛圆内的 t 值将是收敛的。

很明显这些级数可以用来研究运动的初始特性（t 从运动开始计起），因为 a_1 就是 q_1 的初值，b_1 就是 $\dot{q}_1$ 的初值，c_1 就是 $\ddot{q}_1$ 的初值，等等。下面举例说明。

例1. 在铅垂面内的均匀圆盘，质量为 $2m$，半径为 a，可绕过中心的水平轴转动。一质量为 m 的质点 B 用长为 b 的线拴于圆周上 A 点。通过拴结点的半径 OA 开始时是水平的。试确定质点的初始运动的轨迹（图5-4）。

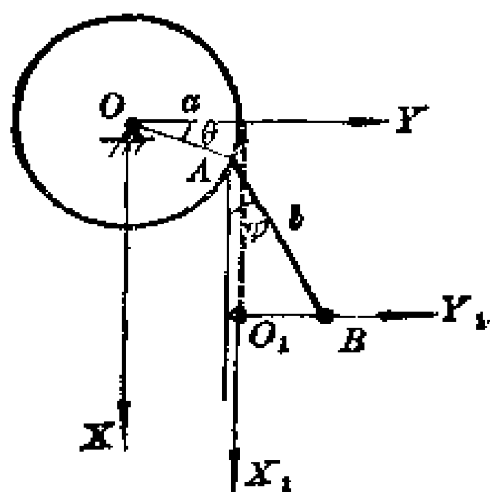


图 5-4

解： 取圆盘转角 θ 及线与铅垂线的夹角 φ 为系统的广义坐标。

我们计算系统的动能。在圆盘中心 O 处取固定直角坐标 XOY。质点的坐标为

$$x = a\sin\theta + b\cos\varphi$$

$$y = a\cos\theta + b\sin\varphi$$

速度分量为

$$\dot{x} = a\dot{\theta}\cos\theta - b\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$\dot{y} = -a\dot{\theta}\sin\theta + b\dot{\varphi}\cos\varphi$$

故质点的动能为

$$T' = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m[a^2\dot{\theta}^2 + b^2\dot{\varphi}^2 - 2ab\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin(\theta + \varphi)]$$

圆盘的动能为

$$T''=\frac{1}{2}2ma^2\dot{\theta}^2$$

因此，系统动能为

$$T=T'+T''=ma^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mb^2\dot{\varphi}^2-mab\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin(\theta+\varphi)$$

而系统的势能为

$$V=-mg(a\sin\theta+b\cos\varphi)$$

系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=ma^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mb^2\dot{\varphi}^2-mab\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin(\theta+\varphi)$$
$$+mg(a\sin\theta+b\cos\varphi) \tag{5-111}$$

因此，系统运动的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$$

成为

$$\left.\begin{aligned}&2a^2\ddot{\theta}-ab\cos(\theta+\varphi)\dot{\varphi}^2-ga\cos\theta\\&\qquad-ab\sin(\theta+\varphi)\ddot{\varphi}=0\\&b^2\ddot{\varphi}-ab\cos(\theta+\varphi)\dot{\theta}^2+gb\sin\varphi\\&\qquad-ab\sin(\theta+\varphi)\ddot{\theta}=0\end{aligned}\right\} \tag{5-112}$$

因为开始时有 $\theta=\varphi=\dot{\theta}=\dot{\varphi}=0$，将其代入(5-112)得初始角加速度

$$\ddot{\theta}=\frac{g}{2a},\qquad \ddot{\varphi}=0$$

因此 θ 从$\frac{g}{4a}t^2$开始，而 φ 从 t^3 开始。设

$$
\left.\begin{aligned}
\theta &= \frac{g}{4a}t^2 + At^3 + Bt^4 + \cdots \\
\varphi &= Ct^3 + Dt^4 + Et^5 + Ft^6 + \cdots
\end{aligned}\right\} \tag{5-113}
$$

注意到

$$
\cos(\theta+\varphi) \approx 1 - \frac{1}{2}(\theta+\varphi)^2 + \cdots
$$

$$
\sin(\theta+\varphi) \approx \theta + \varphi + \cdots
$$

$$
\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \cdots
$$

$$
\sin\varphi = \varphi + \cdots
$$

将(5-113)代入(5-112)，则有

$$
\begin{aligned}
&2a^2\left[\frac{g}{2a} + 6At + 12Bt^2 + \cdots\right] - ab\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{g}{4a}t^2 + At^3\right.\right. \\
&\left.\left. + Ct^3 + \cdots\right)^2 + \cdots\right][3Ct^2 + 4Dt^3 + \cdots]^2 - ga\,[1 \\
&- \frac{1}{2}\left(\frac{g}{4a}t^2 + At^3 + Bt^4 + \cdots\right)^2 + \cdots\Bigg] - ab\left[\frac{g}{4a}t^2\right. \\
&\left. + At^3 + Bt^4 + Ct^3 + Dt^4 + \cdots\right][6Ct + 12Dt^2 + \cdots] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&b^2[6Ct + 12Dt^2 + 20Et^3 + 30Ft^4 + \cdots] - ab[1 \\
&- \frac{1}{2}\left(\frac{g}{4a}t^2 + At^3 + Bt^4 + Ct^3 + Dt^4 + \cdots\right)^2 \\
&+ \cdots]\left[\frac{g}{2a}t + 3At^2 + 4Bt^3 + \cdots\right]^2 + gb[Ct^3 \\
&+ Dt^4 + Et^5 + Ft^6 + \cdots] - ab\left[\frac{g}{4a}t^2 + At^3 + Bt^4\right.
\end{aligned}
$$

$$+Ct^3+Dt^4+\cdots\Big]\Big[\frac{g}{2a}+6At+12Bt^2+\cdots\Big]=0$$

令两方程中 t 的同次幂系数为零，即

$$t^0:\quad ag-ga=0$$

$$t^1:\quad 12a^2A=0$$

$$t^2:\quad 24a^2B=0$$

$$\vdots$$

$$t^1:\quad 6b^2C=0$$

$$t^2:\quad 12b^2D-\frac{bg}{4a}-\frac{bg}{8a}=0$$

$$t^3:\quad 20b^2E-3bgA+gbC-ab\left[\frac{g}{4a}\times 6A+\frac{g}{2a}(A+C)\right]=0$$

$$t^4:\quad 30b^2F-ab\left[9A^2+\frac{4g}{a}B\right]+gbD-ab\left[\frac{g}{2a}(B+D)\right.$$

$$\left.+6A(A+C)+\frac{3g}{a}B\right]=0$$

$$\vdots$$

由这些方程解得 $A=B=C=E=0$

$$D=\frac{g}{32ab},\qquad F=-\frac{g^3}{1920ab^2}$$

于是(5-113)成为

$$\left.\begin{aligned}\theta&=\frac{g}{4a}t^2+0\cdot t^3+0\cdot t^4+\cdots\\ \varphi&=\frac{g^2}{32ab}t^4-\frac{g^3}{1920ab^2}t^6+\cdots\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}114)$$

现在在质点初始位置 O_1 取坐标 $X_1O_1Y_1$，则质点相对于 $X_1O_1Y_1$ 的坐标为

$$x_1 = x - b = a\sin\theta + b(\cos\varphi - 1)$$

$$y_1 = y - a = a(\cos\theta - 1) + b\sin\varphi$$

将(5-114)代入上式，得

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a\theta - \frac{1}{2}b\varphi^2 + \cdots = \frac{1}{4}gt^2 + \cdots \\ y_1 &= -\frac{1}{2}a\theta^2 + b\varphi + \cdots = -\frac{g^3}{1920ab}t^6 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}115)$$

方程(5-115)实质上就是以参数 t 表示的质点的初始轨迹，由(5-115)消去 t，便得

$$x_1^3 = -30aby_1 \qquad (5\text{-}116)$$

方程(5-116)便是质点在初始位置领域内的路径的渐近方程。

例2. 一质量为 m 的小环可自由地在质量为 M、长为 $2a$ 的匀质杆上滑动，杆可绕其一端在铅垂面内转动。开始时杆是水平的，小环离固定端为 r_0。试求小环初始时其路径的曲率半径。

解： 令 r,θ 为小环的极坐标(图5-5)。系统动能为

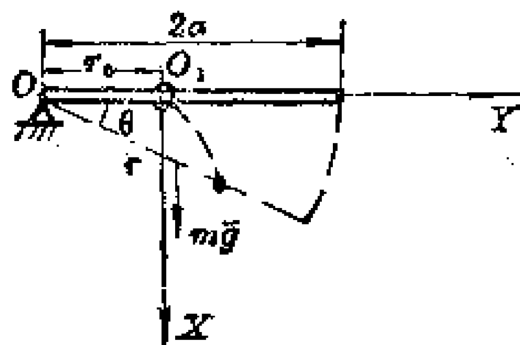


图 5-5

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}\,\frac{4}{3}Ma^2\dot{\theta}^2$$

系统势能

$$V = -mgr\sin\theta - Mga\sin\theta$$

拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0$$

成为

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-g\sin\theta=0\\&\frac{4}{3}Ma^2\ddot{\theta}+mr^2\ddot{\theta}+2mr\dot{r}\dot{\theta}-Mga\cos\theta-mgr\cos\theta=0\end{aligned}\right\}\tag{5-117}$$

因为开始时，$\theta=\dot{\theta}=\dot{r}=0$，$r=r_0\neq0$，故设

$$\left.\begin{aligned}&r=r_0+a_2t^2+a_3t^3+a_4t^4+\cdots\\&\theta=b_2t^2+b_3t^3+\cdots\end{aligned}\right\}\tag{5-118}$$

将(5-118)代入(5-117)，并注意 θ 是小量，得

$$(2a_2+6a_3t+12a_4t^2+\cdots)-(r_0+a_2t^2+a_3t^3+a_4t^4\\+\cdots)(2b_2t+3b_3t^2+\cdots)^2-g(b_2t^2+b_3t^3+\cdots)=0$$

$$\frac{3}{4}Ma^2(2b_2+6b_3t+\cdots)+m(r_0+a_2t^2+a_3t^3+a_4t^4\\+\cdots)^2(2b_2+6b_3t+\cdots)+2m(r_0+a_2t^2+a_3t^3\\+a_4t^4+\cdots)(2a_2t+3a_3t^2+4a_4t^3+\cdots)(2b_2t\\+3b_3t^2+\cdots)-Mga\left[1-\frac{1}{2}(b_2t^2+b_3t^3+\cdots)^2\right]\\-mg(r_0+a_2t^2+a_3t^3+\cdots)\left[1-\frac{1}{2}(b_2t^2+b_3t^3\\+\cdots)^2\right]=0$$

令以上两式中 t 的同次幂系数为零，得

t^0：　$2a_2=0$

t^1：　$6a_3=0$

t^2：　$12a_4-4r_0b^2-gb_2=0$

$$\vdots$$

以及

$$t^0: \quad \frac{8}{3}Ma^2b_2+2mr_0^2b_2-Mga-mgr_0=0$$

$$t^1: \quad \frac{4}{3}Ma^2\cdot 6b_3+mr_0^2\cdot 6b_3=0$$

$$\vdots$$

由此解得 $a_2=a_3=b_3=0$

$$a_4=\frac{1}{12}b_2(g+4r_0b_2)$$

$$b_2=\frac{3g(Ma+mr_0)}{2(4Ma^2+3mr_0^2)}$$

则(5-118)为

$$\left.\begin{aligned} r&=r_0+a_4t^4+\cdots \\ \theta&=b_2t^2+\cdots \end{aligned}\right\} \tag{5-119}$$

在小环初始位置处取坐标 XO_1Y 如图(5-5)，则小环坐标为

$$x=r\sin\theta=[r_0+a_4t^4+\cdots][b_2t^2+\cdots]=r_0b_2t^2+\cdots$$

$$y=r\cos\theta-r_0=[r_0+a_4t^4+\cdots]\left[1-\frac{1}{2}b_2^2t^4+\cdots\right]-r_0$$

$$=\left(a_4-\frac{1}{2}r_0b^2\right)t^4+\cdots$$

令 $t^2=u$，则

$$x=r_0b_2u, \qquad y=\left(a_4-\frac{1}{2}r_0b_2^2\right)u^2$$

$$\frac{dx}{du}=r_0b_2, \qquad \frac{d^2x}{du^2}=0$$

$$\left.\frac{dy}{du}\right|_{u=0}=0,\qquad \frac{d^2y}{du^2}=2\left(a_4-\frac{1}{2}r_0b_2^2\right)$$

于是初始曲率半径为

$$\rho=\left.\frac{\left[\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{du^2}\frac{dx}{du}-\frac{d^2x}{du^2}\frac{dy}{du}\right|}\right|_{u=0}=\frac{(r_0b_2)^3}{2(a_4-\frac{1}{2}r_0b_2^2)(r_0b_2)}$$

$$=\frac{1}{\frac{2a_4}{b_2^2r_0^2}-\frac{1}{r_0}}=\frac{9r_0^2(Ma+mr_0)}{Ma(4a-3r_0)}\tag{5-120}$$

第六节　相对运动动力学的拉格朗日方程

完整系统的拉格朗日方程(4-21)是在惯性坐标系中写出的。这里我们研究相对运动动力学的拉格朗日方程。

1．相对运动的拉格朗日方程

我们研究一个质点系，它由载体和N个质点（被载体）组成。载体的运动给定，需要确定被载体的运动，并且假定被载体的运动不改变载体的事先给定的运动规律。

设载体的运动由基点O的速度$\boldsymbol{v}_0$和它的角速度$\boldsymbol{\omega}$来确定。被载质点M_i相对惯性坐标系$\overline{O}XYZ$的位置用矢径$\boldsymbol{r}_i$确定，M_i对与载体相固联的坐标系$OX'Y'Z'$的位置用矢径$\boldsymbol{r}'_i$确定，设$\boldsymbol{r}'_i$中不显含时间，即

$$\boldsymbol{r}'_i=\boldsymbol{r}'_i(q_1,q_2,\cdots,q_n)\tag{5-121}$$

用$\boldsymbol{r}_0$表示载体基点的矢径，我们有

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}'_i(q_1,q_2,\cdots,q_n)\tag{5-122}$$

其中 $\boldsymbol{r}_0$ 为时间的已知函数。将(5-121)对时间求导数，得到

$$\dot{\boldsymbol{r}}'_i=\overset{*}{\boldsymbol{r}}'_i+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_s}\dot{q}_s+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_i \tag{5-123}$$

其中 $\overset{*}{\boldsymbol{r}}'_i$ 为 $\boldsymbol{r}'_i$ 的相对导数。

系统绝对运动的动能为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\dot{\boldsymbol{r}}_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_0+\overset{*}{\boldsymbol{r}}'_i+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_i)$$

$$\cdot(\dot{\boldsymbol{r}}_0+\overset{*}{\boldsymbol{r}}'_i+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_i)$$

$$=\frac{1}{2}Mv_0^2+M\boldsymbol{v}_0\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_c)+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\bar{\theta}^0\cdot\boldsymbol{\omega}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\overset{*}{\boldsymbol{r}}'_i\cdot\overset{*}{\boldsymbol{r}}'_i+\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{Q}_r+\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{K}_r^0 \tag{5-124}$$

其中 $M=\sum_{i=1}^{N}m_i$ 为被载体的总质量，$\boldsymbol{r}'_c=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}'_i$ 为被载体质心在 $OX'Y'Z'$ 中的矢径，$\bar{\theta}^0$为系统在点 O 的惯性张量，$\boldsymbol{Q}_r$ 为系统相对动量的主矢：$\boldsymbol{Q}_r=\sum_{i=1}^{N}m_i\overset{*}{\boldsymbol{r}}'_i$，$\boldsymbol{K}_r^0$ 为系统对基点 O 的相对动量矩矢：$\boldsymbol{K}_r^0=\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}'_i\times\overset{*}{\boldsymbol{r}}'_i$。

将(5-124)写成

$$T=T_e+T_m+T_r \tag{5-125}$$

则有

$$T_e=\frac{1}{2}Mv_0^2+M\boldsymbol{v}_0\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_c)+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\bar{\boldsymbol{\theta}}^0\cdot\boldsymbol{\omega} \tag{5-126}$$

$$T_m=\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{Q}_r+\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{K}_r^0 \tag{5-127}$$

$$T_r=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\overset{*}{\boldsymbol{r}}'_i\cdot\overset{*}{\boldsymbol{r}}'_i \tag{5-128}$$

它们分别称为牵连运动动能，混合动能和相对运动动能。

现在由拉格朗日方程(4-21)导出相对运动的拉格朗日方程。将(5-125)代入(4-21)，得到

$$\varepsilon_s(T_e)+\varepsilon_s(T_m)+\varepsilon_s(T_r)=Q_s \qquad (5\text{-}129)$$

$$(s=1,2,\cdots,n)$$

因 T_e 中不含广义速度 $\dot{q}_s$，故有

$$\varepsilon_s(T_e)=-\frac{\partial T_e}{\partial q_s}=-M(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{\omega})\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}'_c}{\partial q_s}$$

$$-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\frac{\partial\bar{\theta}^0}{\partial q_s}\cdot\boldsymbol{\omega} \qquad (5\text{-}130)$$

再计算(5-129)中左边第二项。因

$$\varepsilon_s(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{Q}_r)=\dot{\boldsymbol{v}}_0\cdot\frac{\partial\boldsymbol{Q}_r}{\partial\dot{q}_s}+\boldsymbol{v}\cdot\varepsilon_s(\boldsymbol{Q}_r)$$

$$=M\dot{\boldsymbol{v}}_0\cdot\frac{\partial\overset{*}{\boldsymbol{r}'_c}}{\partial\dot{q}_s}+M\boldsymbol{v}_0\cdot\varepsilon_s(\overset{*}{\boldsymbol{r}'_c})$$

又 $$\frac{\partial\overset{*}{\boldsymbol{r}'}}{\partial\dot{q}_s}=\frac{\partial\boldsymbol{r}'}{\partial q_s},\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial\boldsymbol{r}'_c}{\partial q_s}=\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}'_c}{\partial q_s}=\frac{\partial\overset{*}{\boldsymbol{r}'_c}}{\partial q_s}+\boldsymbol{\omega}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}'_c}{\partial q_s} \qquad (5\text{-}131)$$

因此 $$\varepsilon_s(\overset{*}{\boldsymbol{r}'_c})=\frac{d}{dt}\frac{\partial\overset{*}{\boldsymbol{r}'_c}}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial\overset{*}{\boldsymbol{r}'_c}}{\partial q_s}=\boldsymbol{\omega}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}'_c}{\partial q_s}$$

于是 $$\varepsilon_s(\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{Q}_r)=M(\overset{*}{\boldsymbol{v}}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_0)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}'_c}{\partial q_s}+M(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{\omega})\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}'_c}{\partial q_s}$$

$$=M\overset{*}{\boldsymbol{v}}_0\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}'_c}{\partial q_s} \qquad (5\text{-}132)$$

因 $\boldsymbol{\omega}$ 不依赖于 q_s 和 $\dot{q}_s$，类似地得到

$$\varepsilon_s(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{K}_r^0)=\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{K}_r^0}{\partial\dot{q}_s}+\boldsymbol{\omega}\cdot\varepsilon_s(\boldsymbol{K}_r^0)$$

$$=\dot{\omega}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{K}_{\tau}^{0}}{\partial \dot{q}_{s}}+\omega\cdot\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{K}_{\tau}^{0}}{\partial \dot{q}_{s}}\right)^{*}+\omega\times\frac{\partial \boldsymbol{K}_{\tau}^{0}}{\partial \dot{q}_{s}}-\frac{\partial \boldsymbol{K}_{\tau}^{0}}{\partial q_{s}}\right]$$

但 $$\omega\cdot\left(\omega\times\frac{\partial \boldsymbol{K}_{\tau}^{0}}{\partial \dot{q}_{s}}\right)=0$$

故有

$$\varepsilon_{s}(\omega\cdot\boldsymbol{K}_{\tau}^{0})=\dot{\omega}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{K}_{\tau}^{0}}{\partial \dot{q}_{s}}+\omega\cdot\varepsilon_{s}^{*}(\boldsymbol{K}_{\tau}^{0}) \tag{5-133}$$

这里星号（＊）表示在计算欧拉算子时对时间的导数是在与载体相固联的坐标中进行的。

方程(5-129)现在可写成形式

$$\varepsilon_{s}(T'_{\tau})=Q_{s}-M(\overset{*}{\boldsymbol{v}}_{0}+\omega\times\boldsymbol{v}_{0})\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}'_{c}}{\partial q_{s}}+\frac{1}{2}\omega\cdot\frac{\partial \bar{\theta}^{0}}{\partial q_{s}}\cdot\omega$$
$$-\dot{\omega}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{K}_{\tau}^{0}}{\partial \dot{q}_{s}}-\omega\cdot\varepsilon_{s}^{*}(\boldsymbol{K}_{\tau}^{0}) \tag{5-134}$$

现在说明方程(5-134)右边各项的力学意义。矢量

$$-M\dot{\boldsymbol{v}}_{0}=-M(\overset{*}{\boldsymbol{v}}+\omega\times\boldsymbol{v}_{0}) \tag{5-135}$$

可称为平动运动的惯性力，而量

$$Q_{s}^{0}=-M\dot{\boldsymbol{v}}_{0}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}'_{c}}{\partial q_{s}}=-M(\overset{*}{\boldsymbol{v}}_{0}+\omega\times\boldsymbol{v}_{0})\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}'_{c}}{\partial q_{s}}$$
$$=-\frac{\partial}{\partial q_{s}}M(\overset{*}{\boldsymbol{v}}_{0}+\omega\times\boldsymbol{v}_{0})\cdot\boldsymbol{r}'_{c} \tag{5-136}$$

称为平动运动的广义惯性力，标积

$$\Pi^{0}=M(\overset{*}{\boldsymbol{v}}_{0}+\omega\times\boldsymbol{v}_{0})\cdot\boldsymbol{r}'_{c} \tag{5-137}$$

可作为这些力的均匀场的势能来研究。

角速度矢量投影的二次形

$$\Pi^{\omega}=-\frac{1}{2}\omega\cdot\bar{\theta}^{0}\cdot\omega \tag{5-138}$$

可称为离心力势能，而量

$$Q_s^{\omega}=-\frac{\partial \Pi^{\omega}}{\partial q_s}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}^0}{\partial q_s}\cdot\boldsymbol{\omega} \qquad (5\text{-}139)$$

是广义离心力。

现在转向方程(5-134)右边的最后两项，它们不具有有势力特性。注意到

$$\boldsymbol{K}_r^0=\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{r}'_i\times\overset{*}{\boldsymbol{r}}'_i=\sum_{s=1}^{n}\dot{q}_s\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{r}'_i\times\frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_s} \qquad (5\text{-}140)$$

因此

$$\begin{aligned}\omega\cdot\frac{\partial \boldsymbol{K}_r^0}{\partial \dot{q}_s}&=\dot{\omega}\cdot\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{r}'_i\times\frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_s}\\&=\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{\omega}\times\boldsymbol{r}'_i)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_s}\end{aligned}$$

矢量

$$-m_i(\dot{\omega}\times\boldsymbol{r}'_i) \qquad (5\text{-}141)$$

是质点的转动惯性力，因此

$$Q_s^{\dot{\omega}}=\dot{\omega}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{K}_r^0}{\partial \dot{q}_s}=-\sum_{i=1}^{N}(\dot{\omega}\times m_i\boldsymbol{r}'_i)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_s} \qquad (5\text{-}142)$$

是广义转动惯性力。由(5-140)，有

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{K}_r^0}{\partial \dot{q}_s}\right)^*=\sum_{k=1}^{n}\dot{q}_k\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_k}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_s}+\boldsymbol{r}'_i\times\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_k\partial q_s}\right)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{K}_r^0}{\partial q_s}=\sum_{k=1}^{n}\dot{q}_k\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_s}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_k}+\boldsymbol{r}'_i\times\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_s\partial q_k}\right)$$

因此

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{\omega}\cdot\varepsilon_s^*(\boldsymbol{K}_r^0)&=-2\boldsymbol{\omega}\cdot\sum_{k=1}^{n}\dot{q}_k\sum_{i=1}^{N} m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_k}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_s}\\&=-2\omega\cdot\sum_{i=1}^{N} m_i\overset{*}{\boldsymbol{r}}'_i\times\frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_s}\end{aligned}$$

$$=-\sum_{i=1}^{N}m_i(2\boldsymbol{\omega}\times\overset{*}{\boldsymbol{r}}'_i)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}'_i}{\partial q_s} \tag{5-143}$$

它表示广义哥氏惯性力。同时它也可作为广义陀螺力

$$-\boldsymbol{\omega}\cdot\varepsilon_s^*(\boldsymbol{K}_r^0)=\Gamma_s=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{sk}\dot{q}_k \tag{5-144}$$

其中陀螺系数为

$$\gamma_{sk}=2\boldsymbol{\omega}\cdot\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}'_i}{\partial q_s}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}'_i}{\partial q_k}=-\gamma_{ks} \tag{5-145}$$

最后，将(5-137)、(5-138)，(5-142)和(5-144)代入方程(5-134)，我们得到

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_r}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T_r}{\partial q_s}=Q_s-\frac{\partial}{\partial q_s}(\Pi^0+\Pi^\omega)+Q_s^{\dot{\omega}}+\Gamma_s$$

$$(s=1,2,\cdots,n) \tag{5-146}$$

方程(5-146)就是相对运动动力学的拉格朗日方程。这方程的左边仅依赖于由被载体相对载体的位形和运动所确定的量。只要在方程右边给主动力加上由载体运动引起的所谓惯性力，相对运动的方程就有绝对运动方程的形式。

我们研究方程(5-146)的一个简单而又重要的特殊情形，即载体以匀角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕固定轴 $\bar{O}Z$ 转动，且基点选在$\bar{O}$上。此时显然有

$$\Pi^0=Q_s^{\dot{\omega}}=0 \tag{5-147}$$

令 $\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}'$ 为$\bar{O}X'$，$\bar{O}Y'$,$\bar{O}Z'$ 方向的单位矢量，则

$$\Pi^\omega=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\tilde{\boldsymbol{\theta}}^0\cdot\boldsymbol{\omega}=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_i)\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_i)$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i[\omega\boldsymbol{k}'\times(x'_i\boldsymbol{i}'+y'_i\boldsymbol{j}'+z'_i\boldsymbol{k}')]$$

$$\cdot[\omega\boldsymbol{k}'\times(x'_i\boldsymbol{i}'+y'_i\boldsymbol{j}'+z'_i\boldsymbol{k}')]$$

$$= -\frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{N} m_i(x_i'^2 + y_i'^2) \tag{5-148}$$

$$\Gamma_s = -\sum_{i=1}^{N} m_i(2\boldsymbol{\omega}\times\overset{*}{\boldsymbol{r}}'_i)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_s} = -\sum_{i=1}^{N} m_i[2\omega\boldsymbol{k}'\times(\overset{*}{x}'_i\boldsymbol{i}' + \overset{*}{y}'_i\boldsymbol{j}' + \overset{*}{z}'_i\boldsymbol{k}')]\cdot\left(\frac{\partial x'_i}{\partial q_s}\boldsymbol{i}' + \frac{\partial y'_i}{\partial q_s}\boldsymbol{j}' + \frac{\partial z'_i}{\partial q_s}\boldsymbol{k}'\right)$$

$$= -2\omega\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\overset{*}{x}'_i\frac{\partial y'_i}{\partial q_s} - \overset{*}{y}'_i\frac{\partial x'_i}{\partial q_s}\right) \tag{5-149}$$

将(5-147)，(5-148)和(5-149)代入(5-146)，我们得到

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T_r}{\partial q_s} = Q_s - \frac{\partial}{\partial q_s}\left[-\frac{1}{2}\omega^2\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2)\right] - 2\omega\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\overset{*}{x}'_i\frac{\partial y'_i}{\partial q_s} - \overset{*}{y}'_i\frac{\partial x'_i}{\partial q_s}\right) \tag{5-150}$$

$$(s = 1, 2, \cdots, n)$$

特别地，如果满足条件

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\overset{*}{x}'_i\frac{\partial y'_i}{\partial q_s} - \overset{*}{y}'_i\frac{\partial x'_i}{\partial q_s} = 0\right) \tag{5-151}$$

则(5-150)成为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T_r}{\partial q_s} = Q_s - \frac{\partial}{\partial q_s}\left[-\frac{1}{2}\omega^2\sum_{i=1}^{N} m_i(x_i'^2 + y_i'^2)\right]$$

$$(s = 1, 2, \cdots, n) \tag{5-152}$$

2. 相对平衡

设

$$q_s = q_{so} = \text{const} \tag{5-153}$$

为被载体相对平衡时的广义坐标。在被载体相对平衡时广义速度 $\dot{q}_s$ 和广义加速度 $\ddot{q}_s$ 等于零，因此相对运动动能 T_r 和陀螺力 Γ_s 都等于零。

假设载体运动时载体上任何一点的加速度的大小和相对于载体相固联的轴的方向都不变。因此基点的加速度 $\boldsymbol{a}_0=\dot{\boldsymbol{v}}_0$ 和角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的大小和方向（对于载体来说）都不变。于是广义转动惯性力 $Q_s^{\dot{\omega}}$ 也是零。此外，还假设广义力 Q_s 不显含时间 t。

这样，由方程(5-146)可得到广义坐标 q_{s0} 满足方程

$$Q_s-\frac{\partial}{\partial q_s}(\Pi^0+\Pi^\omega)=0 \quad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (5\text{-}154)$$

其中 $$\Pi^0=M\boldsymbol{a}_0\cdot\boldsymbol{r}'_c, \qquad \Pi^\omega=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\bar{\boldsymbol{\theta}}^0\cdot\boldsymbol{\omega} \qquad (5\text{-}155)$$

而矢量 $\boldsymbol{r}'_c$ 与惯性张量 $\bar{\boldsymbol{\theta}}^0$ 依赖于未知坐标 q_{s0}。

如果方程组(5-154)有解(5-153)(一个或几个)，那么就可确定相对平衡位置。所找到的相对平衡位置的稳定性可按运动稳定性理论的通常方法分别对每个可能的平衡位置来研究。

对于载体以匀角速度 ω 转动的情形，由方程(5-150)得到相对平衡时广义坐标 q_{s0} 所满足的方程为

$$Q_s-\frac{\partial}{\partial q_s}\left[-\frac{1}{2}\omega^2\sum_{i=1}^{N}m_i(x_i'^2+y_i'^2)\right]=0 \qquad (5\text{-}156)$$

$$(s=1,2,\cdots,n)$$

3. 例题

例1. 第四章第二节例3(图4-4)。

解： 这是载体以匀角速度 ω 转动的情形。令 $q_1=z, q_2=r$，我们有

$$x'=r, \quad y'=0$$

因此条件(5-151)得以满足。方程(5-152)成为

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial T_r}{\partial \dot{z}}-\frac{\partial T_r}{\partial z}=Q_z-\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{2}\omega^2 m r^2\right)\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T_r}{\partial \dot{r}}-\frac{\partial T_r}{\partial r}=Q_r-\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{2}\omega^2 m r^2\right)\end{aligned}\right\} \tag{5-157}$$

相对运动动能

$$T_r=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+\dot{z}^2)$$

广义力为

$$Q_z=-mg\cos\alpha$$

$$Q_r=-mg\sin\alpha\sin\omega t$$

将这些表达式代入(5-157)，得到

$$\left.\begin{aligned}m\ddot{z}&=-mg\cos\alpha\\ m\ddot{r}&=-mg\sin\alpha\sin\omega t+m\omega^2 r\end{aligned}\right\} \tag{5-158}$$

所得结果与(4-77)、(4-78)相同。

例2. 一质点受重力作用，在半径为 a 的光滑圆管中运动，此圆管以角速度 ω 绕与其平面成 α 角的固定铅垂轴匀速转动(图 5-6)。试列写质点相对运动微分方程，并求出相对平衡位置。

解：这是载体以匀角速度 ω 转动的情形。取质点离开圆管最低点的张角 θ 为广义坐标，

则相对运动动能为

$$T_r=\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 \tag{5-159}$$

势能为(以 O 为零点)

$$V=-mga\cos\theta\cos\alpha$$

因此广义力为

$$Q_\theta=-\frac{\partial V}{\partial\theta}$$

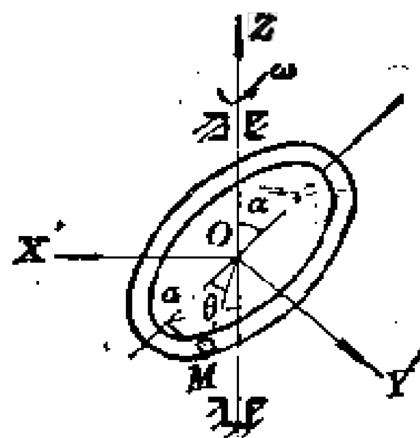


图 5-6

$$= -mga\cos\alpha\sin\theta \tag{5-160}$$

现在验证条件(5-151)。因

$$x'=a\cos\theta\sin\alpha,\quad y'=a\sin\theta,\quad z'=-a\cos\theta\cos\alpha$$

$$\overset{*}{x}'=-a\dot{\theta}\sin\theta\sin\alpha,\quad \overset{*}{y}'=a\dot{\theta}\cos\theta$$

于是

$$m\left(\overset{*}{x}'\frac{\partial y'}{\partial\theta}-\overset{*}{y}'\frac{\partial x'}{\partial\theta}\right)=m[-a\dot{\theta}\sin\theta\sin\alpha\cdot a\cos\theta$$

$$-a\dot{\theta}\sin\theta\cos\alpha(-a\sin\theta\sin\alpha)]=0$$

方程(5-152)给出

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_r}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial T_r}{\partial\theta}=Q_\theta-\frac{\partial}{\partial\theta}\Big[-\frac{m}{2}\omega^2(a^2\sin^2\theta$$

$$+a^2\cos^2\theta\sin^2\alpha)\Big] \tag{5-161}$$

将(5-159)、(5-160)代入(5-161)，得到质点相对运动微分方程

$$ma^2\ddot{\theta}=-mga\sin\theta\cos\alpha+m\omega^2a^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\alpha \tag{5-162}$$

假设 $\theta=\theta_0$ 为相对平衡位置，则它满足方程

$$-mga\sin\theta_0\cos\alpha+m\omega^2a^2\sin\theta_0\cos\theta_0\cos^2\alpha=0$$

或
$$m\omega^2a^2\sin\theta_0\cos\alpha\left(-\frac{g}{a\omega^2}+\cos\theta_0\cos\alpha\right)=0$$

因此

$$\sin\theta_0=0 \tag{5-163}$$

$$\cos\theta_0=\frac{g}{a\omega^2\cos\alpha} \tag{5-164}$$

方程(5-163)表明 $\theta_0=0$ 或 $\theta_0=\pi$ 是两个相对平衡位置。在方程(5-164)中，如果

$$\frac{g}{a\omega^2\cos\alpha}\leqslant 1 \tag{5-165}$$

则有解

$$\theta_0=\arccos\left(\frac{g}{a\omega^2\cos\alpha}\right) \tag{5-166}$$

第七节 变质量力学系统的拉格朗日方程

我们首先建立变质量力学系统的动力学普遍方程，然后由此导出变质量力学系统的拉格朗日方程，最后举例说明方程的应用。

1. 变质量力学系统的动力学普遍方程

我们研究由N个质点所组成的力学系统。在瞬时t，第i个质点的质量为$m_i(i=1,2,\cdots,N)$；在瞬时$t+dt$，由质点分离出（或并入）的微粒的质量为dm_i。设系统的位置由n个广义坐标$q_1,q_2,\cdots,q_n$来确定。假设质点的质量是时间、广义坐标和广义速度的函数

$$m_i=m_i(q_s,\dot{q}_s,t) \tag{5-167}$$

$$(i=1,2,\cdots,N;s=1,2,\cdots,n)$$

对系统中第i个质点列写变换了的密歇尔斯基(Мещерский)方程

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i+\boldsymbol{R}_i \quad (i=1,2,\cdots,N) \tag{5-168}$$

其中$\boldsymbol{r}_i$为质点的矢径，$\ddot{\boldsymbol{r}}_i$为质点的加速度，$\boldsymbol{F}_i$为作用在质点上的主动力的合力，$\boldsymbol{N}_i$为作用在质点上的约束反力的合力，$\boldsymbol{R}_i$为作用在质点上的反推力的合力，并且

$$\boldsymbol{R}_i=\dot{m}_i\boldsymbol{u}_i \tag{5-169}$$

式中 $\boldsymbol{u}_i$ 为由第 i 个质点分离出（或并入）的微粒相对它的速度。

将(5-168)两边点乘虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_i$，并对 i 求和，我们得到

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i+\boldsymbol{R}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \qquad (5\text{-}170)$$

在理想约束下，有 $\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{N}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$，故得

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \qquad (5\text{-}171)$$

这就是理想约束下变质量力学系统的动力学普遍方程，或称达朗伯——拉格朗日原理。

2. 变质量完整力学系统的拉格朗日方程

现将(5-171)变换为广义坐标形式。

令 $\frac{\text{Д}}{\text{Д}\dot{q}_s}$，$\frac{\text{Д}}{\text{Д}q_s}$ 及 $\frac{D}{Dt}$ 分别为把质量当作常数时对广义速度、广义坐标的偏导数及对时间的导数。系统的动能为

$$T=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i \qquad (5\text{-}172)$$

因此有

$$\frac{\text{Д}T}{\text{Д}\dot{q}_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}_i\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_s} \qquad (5\text{-}173)$$

$$\frac{D}{Dt}\frac{\text{Д}T}{\text{Д}\dot{q}_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_s}+\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_s} \qquad (5\text{-}174)$$

$$\frac{\text{Д}T}{\text{Д}q_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s} \qquad (5\text{-}175)$$

由经典拉格朗日关系(4-8)和(4-11)，我们有

$$\frac{D}{Dt}\frac{\text{Д}T}{\text{Д}\dot{q}_s}-\frac{\text{Д}T}{\text{Д}q_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \tag{5-176}$$

虚位移$\delta\boldsymbol{r}_i$可写成

$$\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\delta q_s \tag{5-177}$$

将(5-176)、(5-177)代入方程(5-171)我们得到

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q_s+\Psi_s-\frac{D}{Dt}\frac{\text{Д}T}{\text{Д}\dot{q}_s}+\frac{\text{Д}T}{\text{Д}q_s}\right)\delta q_s=0 \tag{5-178}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}Q_s&=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\\ \Psi_s&=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\end{aligned}\right\} \tag{5-179}$$

注意到(5-178)中的δq_s是独立的、任意的，我们得到

$$\frac{D}{Dt}\frac{\text{Д}T}{\text{Д}\dot{q}_s}-\frac{\text{Д}T}{\text{Д}q_s}=Q_s+\Psi_s\quad(s=1,2,\cdots,n) \tag{5-180}$$

方程(5-180)称为变质量完整力学系统“凝固导数”表示的拉格朗日方程。将它们与常质量系统的拉格朗日方程(4-21)相比较，在方程(5-180)右边多出广义反推力Ψ_s，方程左边则以凝固导数代替普通导数。方程(5-180)是更一般的方程。如果系统是常质量的，则(5-180)中的$\Psi_s=0$，凝固导数Д及D成为普通记号∂及d，于是(5-180)成为(4-21)。

下面导出$Pars$导数表示的拉格朗日方程。$Pars$导数可以叫“半凝固导数”，它与前面所述凝固导数的差别仅在于用$\frac{d}{dt}$代替$\frac{D}{Dt}$。由(5-173)我们有

$$\frac{d}{dt}\frac{\text{Д}T}{\text{Д}\dot{q}_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}+\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\dot{m}_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \qquad (5\text{-}181)$$

因此方程(5-178)成为

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q_s+\Phi_s-\frac{d}{dt}\frac{\text{Д}T}{\text{Д}\dot{q}_s}+\frac{\text{Д}T}{\text{Д}q_s}\right)\delta q_s=0 \qquad (5\text{-}182)$$

其中

$$\boldsymbol{\Phi}_s=\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{R}_i+\dot{m}_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \qquad (5\text{-}183)$$

由(5-182)中 δq_s 的独立性，我们得到

$$\frac{d}{dt}\frac{\text{Д}T}{\text{Д}\dot{q}_s}-\frac{\text{Д}T}{\text{Д}q_s}=Q_s+\Phi_s \quad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (5\text{-}184)$$

方程(5-184)称为变质量完整力学系统“半凝固导数”表示的拉格朗日方程。这个方程在 $\boldsymbol{R}_i=-\dot{m}_i\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 时，有形式

$$\frac{d}{dt}\frac{\text{Д}T}{\text{Д}\dot{q}_s}-\frac{\text{Д}T}{\text{Д}q_s}=Q_s \quad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (5\text{-}185)$$

方程(5-185)就是相对论中变质量问题的拉格朗日方程。

最后，我们导出普通导数表示的拉格朗日方程。在一般条件(5-167)下，我们有

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_s}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_s}\cdot\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial m_i}{\partial q_s}\cdot\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_s}+\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_s}$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\dot{m}_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_s}+\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_s}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}+\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s}+\sum_{i=1}^{N} \dot{m}_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}$$

$$+\sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_s}\right)$$

考虑到

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i=\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\right) \delta q_s$$

于是得

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i=\sum_{s=1}^{N}\left\{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}-\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\right.$$

$$-\sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_s}\right)$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial m_i}{\partial q_s} \cdot \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i\right\} \delta q_s \quad (5\text{-}186)$$

将(5-186)、(5-179)代入方程(5-171)，并令

$$\boldsymbol{P}_s=\sum_{i=1}^{N}\left\{\left(\boldsymbol{R}_i+\dot{m}_i \dot{\boldsymbol{r}}_i\right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}-\frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial m_i}{\partial q_s}\right.$$

$$\left.+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_s}\right)\right\} \quad (5\text{-}187)$$

则得

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q_s+P_s-\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\partial T}{\partial q_s}\right) \delta q_s=0 \quad (5\text{-}188)$$

由(5-188)中 δq_s 的独立性，我们得到

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+P_s \quad (s=1,2,\cdots,n) \quad (5\text{-}189)$$

方程(5-189)称为变质量完整力学系统普遍导数表示的拉格朗日方程。对于常质量系统，有 $P_s=0 \quad (s=1,2,\cdots,n)$，方

程(5-189)成为普通方程(4-21)。

3. 例题

例1. 为建立人造引力场，依惯性运动的飞船由于反推力而绕对称轴加快旋转起来。全部 n 个喷气发动机的喷口在垂直于飞船轴线的平面内成对称分布，与该轴距离为 R，而且可以认为工质集中在 $1,2,\cdots,n$ 点上(图5-7)。气体以不变的相对速度 u 流动，飞船中心的速度方向沿其轴线。求使飞船从角速度 ω_0 加快到角速度 ω_1 所必须的工质的量值 Δm。

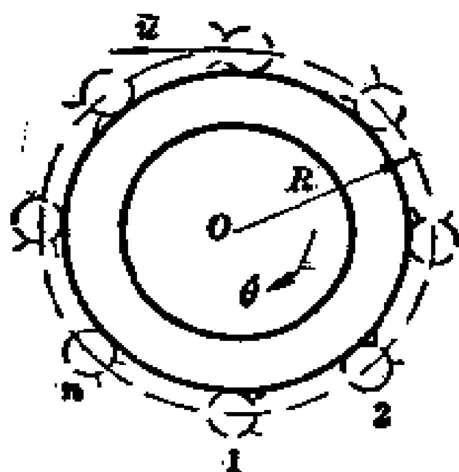


图 5-7

解： 首先列写飞船绕轴旋转的运动微分方程。取飞船绕轴转角 θ 为广义坐标。设飞船壳体关于轴 O 的转动惯量为 J_0，工质为 $m(t)$。系统动能为

$$T=\frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m(t)R^2\cdot\dot{\theta}^2 \qquad (5\text{-}190)$$

广义力 $Q_\theta=0$，广义反推力

$$\Psi_\theta=\boldsymbol{R}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\theta}=\dot{m}\boldsymbol{u}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\theta}=-\dot{m}Ru \qquad (5\text{-}191)$$

应用方程(5-180)，我们有

$$\frac{D}{Dt}\frac{\text{Д}T}{\text{Д}\dot{\theta}}-\frac{\text{Д}T}{\text{Д}\theta}=Q_\theta+\Psi_\theta \qquad (5\text{-}192)$$

即

$$J_0\ddot{\theta}+m(t)R^2\ddot{\theta}=-\dot{m}Ru \qquad (5\text{-}193)$$

其次，解方程(5-193)。因 $\ddot{\theta}=\frac{d\omega}{dt}$，$\dot{m}=\frac{dm}{dt}$，方程(5-193)

可写成

$$d\omega = -\frac{Ru}{J_0 + mR^2}dm$$

积分之，得

$$\omega_1 - \omega_0 = -\frac{u}{R}\ln(J_0 + mR^2)\Big|_{t_0}^{t_1}$$

$$= -\frac{u}{R}\ln\frac{J_0 + m(t_1)R^2}{J_0 + m(t_0)R^2} \qquad (5\text{-}194)$$

令飞船壳体和剩余工质的转动惯量为 $J = J_0 + m(t_1)R^2$，而 $J_0 + m(t_0)R^2 = J + \Delta mR^2$，其中 Δm 为所求工质的量值。于是(5-194)写成

$$\omega_1 - \omega_0 = -\frac{u}{R}\ln\frac{J}{J + \Delta mR^2}$$

由此解得

$$\Delta m = \frac{J}{R^2}\left[e^{\frac{\omega_1 - \omega_0}{u}\cdot R} - 1\right] \qquad (5\text{-}195)$$

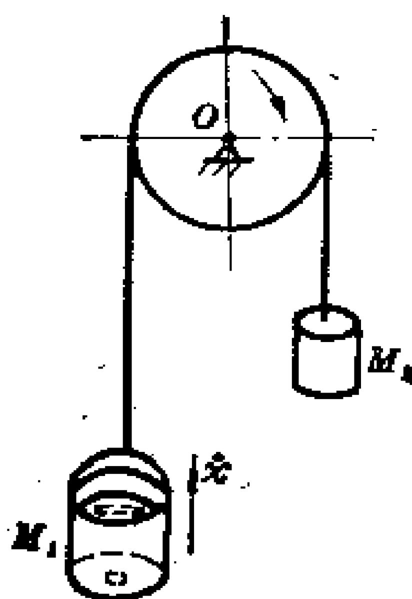


图 5-8

例2. 质量为 M_1 半径为 R_1 的圆柱水桶被质量为 M_2 的重物用粗绳提起。粗绳本身是不可伸长的无重量的，并且绕过半径为R的滑轮。滑轮的转动惯量等于J。水桶装满了水，水从底部中心处的截面为 s 的孔中流出。桶中水的水准面一直是水平的，而流速等于 $u(t)$(图5-8)。试列出水桶的运动微分方程。

解： 令水桶上升速度为 $\dot{x}$，

则滑轮角速度为$\frac{\dot{x}}{R}$，重物M_2下降速度为$\dot{x}$，而桶中水的绝对速度为$\dot{x}-\frac{us}{\pi R_1^2}$。系统动能为

$$T=\frac{1}{2}M_2\dot{x}^2+\frac{1}{2}J\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2+\frac{1}{2}M_1\dot{x}^2$$

$$+\frac{1}{2}m(t)\left(\dot{x}-\frac{us}{\pi R_1^2}\right)^2 \qquad (5\text{-}196)$$

广义力

$$Q_x=M_2g-[M_1+m(t)]g \qquad (5\text{-}197)$$

首先应用方程(5-180)。广义反推力$\Psi_x=\boldsymbol{R}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}=\dot{m}\boldsymbol{u}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}$，这里的$\boldsymbol{u}$应理解为出口孔处的速度相对于水平面下降的速度，大小为$u-u\frac{S}{\pi R_1^2}$，方向向下。因此

$$\Psi_x=-\dot{m}\left(u-\frac{us}{\pi R_1^2}\right) \qquad (5\text{-}198)$$

方程(5-180)

$$\frac{D}{Dt}\frac{\text{Д}T}{\text{Д}\dot{x}}-\frac{\text{Д}T}{\text{Д}x}=Q_x+\Psi_x$$

给出

$$\left(M_1+M_2+\frac{J}{R^2}\right)\ddot{x}+m(t)\left(\ddot{x}-\frac{\dot{u}s}{\pi R_1^2}\right)$$

$$=-\dot{m}\left(u-\frac{us}{\pi R_1^2}\right)+M_2g-[M_1+m(t)]g \quad (5\text{-}199)$$

而质量变化规律为

$$\dot{m}=-u\rho s \qquad (5\text{-}200)$$

其次，应用方程(5-184)。这时需计算

$$\Phi_x=(\boldsymbol{R}+\dot{m}\dot{\boldsymbol{r}})\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}$$

此处$\dot{\boldsymbol{r}}$应理解为水面运动的绝对速度，大小为$\dot{x}-\frac{us}{\pi R_1^2}$，方向朝上，因此

$$\Phi_x=-\dot{m}\left(u-\frac{us}{\pi R_1^2}\right)+\dot{m}\left(\dot{x}-\frac{us}{\pi R_1^2}\right)=\dot{m}(\dot{x}-u) \tag{5-201}$$

方程(5-184)给出

$$\frac{d}{dt}\frac{ДT}{Д\dot{x}}-\frac{ДT}{Дx}=Q_x+\Phi_x$$

即

$$\left(M_1+M_2+\frac{J}{R^2}\right)\ddot{x}+m(t)\left(\ddot{x}-\frac{\dot{u}s}{\pi R_1^2}\right)+\dot{m}\left(\dot{x}-\frac{us}{\pi R_1^2}\right)$$
$$=\dot{m}(\dot{x}-u)+M_2g-[M_1+m(t)]g \tag{5-202}$$

它显然等价于方程(5-199)。

最后，应用方程(5-189)。对本题，有

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=\frac{ДT}{Д\dot{x}},\qquad P_x=\Phi_x \tag{5-203}$$

故方程(5-189)也给出(5-202)。

第八节　带参数约束系统的拉格朗日方程

力学系统的运动依赖于作用力和所加的约束，因此人们可借助于力来控制运动(称为动力学控制)，也可借助于约束来控制运动(称为运动学控制)。这一节，我们研究一类可控

力学系统，它所受到的约束依赖于某些控制参数。

1. 带参数约束系统的拉格朗日方程

设某力学系统由N个质点组成，点的直角坐标为$x_1, y_1, z_1, \cdots, x_N, y_N, z_N$。系统受有$l$个完整约束，其中$l_1$个是通常的约束

$$f_{\rho_1}(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_N, y_N, z_N, t)=0 \quad (\rho_1=1,2,\cdots,l_1) \tag{5-204}$$

l_2个是包含控制参数的约束

$$\varphi_{\rho_2}(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_N, y_N, z_N, u_1, u_2, \cdots, u_m, t)=0 \quad (\rho_2=1,2,\cdots,l_2) \tag{5-205}$$

其中$u_1, u_2, \cdots, u_m$，是控制参数，而$l_1+l_2=l$。约束(5-205)可称为参数约束。

设系统所受约束是理想的，即约束反力在虚位移上的元功之和为零，我们有

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i=0 \tag{5-206}$$

这个等式对系统所有虚位移都成立。由牛顿第二定律，有

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i \quad (i=1,2,\cdots,N) \tag{5-207}$$

其中m_i为点的质量，$\ddot{\boldsymbol{r}}_i$为点的加速度，$\boldsymbol{F}_i$为作用在点上的主动力的合力，而$\boldsymbol{R}_i$是约束反力。将(5-207)代入(5-206)，得到

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i=0 \tag{5-208}$$

这就是带参数约束力学系统的达朗伯——拉格朗日原理。

现在由原理(5-208)和约束(5-204)、(5-205)导出系统的拉格朗日方程。

设 $F_1, F_2\cdots, F_n$，为坐标、时间和控制参数的函数并令

$$F_s(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_N, y_N, z_N, u_1, u_2, \cdots, u_m, t) = q_s$$

$$(s=1,2,\cdots,n;\ n=3N-l) \qquad (5\text{-}209)$$

F_s 的选取使(5-209)与(5-204)、(5-205)相对变量 $x_1, y_1, z_1, \cdots, x_N, y_N, z_N$ 是独立的。因此有

$$\left.\begin{array}{l} x_i = x_i(q_1, q_2, \cdots, q_n, u_1, u_2, \cdots, u_m, t) \\ y_i = y_i(q_1, q_2, \cdots, q_n, u_1, u_2, \cdots, u_m, t) \\ z_i = z_i(q_1, q_2, \cdots, q_n, u_1, u_2, \cdots, u_m, t) \end{array}\right\} \qquad (5\text{-}210)$$

对于控制参数的固定值，在量值 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 和为约束允许的系统的位置之间存在单值对应关系。类似于通常系统，可称 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 为所研究带参数约束系统的广义坐标。

由等式(5-210)，得到

$$\left.\begin{array}{l} \delta x_i = \sum\limits_{s=1}^{n} \dfrac{\partial x_i}{\partial q_s}\delta q_s \\ \delta y_i = \sum\limits_{s=1}^{n} \dfrac{\partial y_i}{\partial q_s}\delta q_s \\ \delta z_i = \sum\limits_{s=1}^{n} \dfrac{\partial z_i}{\partial q_s}\delta q_s \end{array}\right\} \qquad (5\text{-}211)$$

其中 $\delta q_1, \delta q_2, \cdots, \delta q_n$ 是任意的。将(5-211)代入(5-208)，得到

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{N}\Big[(-m_i\ddot{x}_i + F_{ix})\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + (-m_i\ddot{y}_i + F_{iy})\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + (-m_i\ddot{z}_i + F_{iz})\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\Big]\delta q_s = 0 \qquad (5\text{-}212)$$

我们来变换(5-212)的左边部分。因

$$\dot{x}_i = \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial x_i}{\partial u_\nu}\dot{u}_\nu$$

于是有

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_s}=\frac{\partial x_i}{\partial q_s},\qquad \frac{d}{dt}\ \frac{\partial x_i}{\partial q_s}=\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_s}\qquad (5\text{-}213)$$

对于 y_i，z_i 有类似的关系式。关系(5-213)可称为带参数约束系统的经典拉格朗日关系。可见，这里将控制参数当作独立的参数来处理。

考虑到(5-213)，我们有

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+\ddot{y}_i\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+\ddot{z}_i\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)$$

$$=\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+\dot{y}_i\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+\dot{z}_i\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)\right]$$

$$-\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\dot{x}_i\frac{d}{dt}\ \frac{\partial x_i}{\partial q_s}+\dot{y}_i\frac{d}{dt}\ \frac{\partial y_i}{\partial q_s}+\dot{z}_i\frac{d}{dt}\ \frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right]$$

$$=\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_s}+\dot{y}_i\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_s}+\dot{z}_i\frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_s}\right)\right]$$

$$-\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_s}+\dot{y}_i\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_s}+\dot{z}_i\frac{\partial \dot{z}_i}{\partial q_s}\right]$$

$$=\frac{d}{dt}\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}\quad (s=1,2,\cdots,n)\qquad (5\text{-}214)$$

其中 $T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)$ 为系统的动能。将(5-214)代入(5-212)，我们得到

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{d}{dt}\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\partial T}{\partial q_s}\ +Q_s\right)\delta q_s=0\qquad (5\text{-}215)$$

其中 $$Q_s=\sum_{i=1}^{N}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)(5\text{-}216)$$

为广义力。由于(5-215)中的 δq_s 是任意的，我们得到带参数约束系统的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s \quad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (5\text{-}217)$$

可见，带参数约束系统的运动方程具有通常第二类拉格朗日方程的形式。

如果作用在系统上的力有势，并令势能为 V，则 $Q_s=-\frac{\partial V}{\partial q_s}$，而方程(5-217)成为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \quad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (5\text{-}218)$$

其中 $L=T-V$ 为拉格朗日函数。

方程(5-217)或(5-218)的数目都等于系统广义坐标数目 n，但是，这些方程除广义坐标外还包含 m 个控制参数，这些控制参数还是不定的变量。因此，方程组是不封闭的，系统运动不确定。仅当给出控制规律时，这些方程才是封闭的。

2. 例题

一小环可沿一光滑杆自由滑动，杆的一端用铰链固定。设杆在铅垂平面内运动，在小环运动过程中杆与向下的铅垂线所成的角度可取任意值。试建立小环的运动微分方程。

解：设杆与向下的铅垂线间的夹角为 θ，小环的坐标为 x,y，其中坐标原点 O 选在固定铰链处，OX 向下，OY 向右。小环运动时所受约束为

$$y-x\,\mathrm{tg}\theta=0 \qquad (5\text{-}219)$$

其中 θ 是控制参数。取原点 O 至小环的距离 r 为广义坐标，则小环的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2) \qquad (5\text{-}520)$$

其中 m 为小环的质量。于是有

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}, \quad \frac{\partial T}{\partial r}=mr\dot{\theta}^2$$

因此，方程(5-217)给出

$$m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2=Q_r \tag{5-221}$$

其中 Q_r 为广义力。设作用于小环上的主动力分量为 F_x、F_y，则

$$Q_r=F_x\frac{\partial x}{\partial r}+F_y\frac{\partial y}{\partial r}=F_x\cos\theta+F_y\sin\theta \tag{5-222}$$

将(5-222)代入(5-221)，我们得到

$$m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2=F_x\cos\theta+F_y\sin\theta \tag{5-223}$$

方程(5-223)中包含控制参数 θ。如果给出控制规律

$$\theta=\theta(x,y,\dot{x},\dot{y},t) \tag{5-224}$$

那么问题可解。

第九节　包含伺服约束系统的拉格朗日方程

包含伺服约束的系统是一类可控系统。在这类系统中，约束的实现不是被动的，而是利用某些力（电磁力，压缩空气的压力等），即一些辅助能源，这些能源自动地起作用并自动地实现这样或那样的约束。

我们要区别通常约束、上一节提到的参数约束以及本节中的伺服约束。力学系统中所研究的通常约束表示物体间的接触条件，约束反力是接触作用力，属于被动力范畴。参数约束也表示接触条件，但不同于通常约束，它的约束反力不纯粹是被动的，因为它不仅依赖于主动力而且还依赖于出现在约束方程中的控制参数，而通过这些参数主动作用可加在系

统运动上。伺服约束的实现不是靠简单接触来实现，不是被动的，而是利用辅助能源直接实现的。

1. 包含伺服约束系统的拉格朗日方程

设某完整系统由N个质点所组成，系统的运动受到l个完整约束，其中l_1个是通常约束

$$f_{\rho_1}(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_N, y_N, z_N, t)=0 \qquad (5\text{-}225)$$

$$(\rho_1=1,2,\cdots,l_1)$$

l_2个是伺服约束

$$\Psi_{\rho_2}(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_N, y_N, z_N, t)=0 \qquad (5\text{-}226)$$

$$(\rho_2=1,2,\cdots,l_2)$$

我们称约束(5-225)为第一类约束，称约束(5-226)为第二类约束。对于第一类约束(5-225)，加在虚位移上的条件为

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_{\rho_1}}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial f_{\rho_1}}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial f_{\rho_1}}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0 \qquad (5\text{-}227)$$

$$(\rho_1=1,2,\cdots,l_1)$$

而且第一类约束反力的虚功之和为零。但是，对第二类约束(5-226)来说，它的约束反力的虚功之和，一般不为零。

力学系统的达朗伯——拉格朗日原理可写成形式

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_{i1}+\boldsymbol{R}_{i2})\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \qquad (5\text{-}228)$$

其中$\boldsymbol{R}_{i1}$为第一类约束反力，$\boldsymbol{R}_{i2}$为第二类约束反力。因为第一类约束反力是理想的，故有

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_{i1}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \qquad (2\text{-}229)$$

将(5-229)代入(5-228)得到

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_{i2})\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \qquad (5\text{-}230)$$

(5-230)就是包含伺服约束系统的达朗伯——拉格朗日原理，其中包含伺服约束反力 $\boldsymbol{R}_{i2}$。这就是包含伺服约束系统与通常系统和带参数约束系统的差别。

为了使原理(5-230)具有通常的形式(3-12),我们设法由(5-230)中消除第二类约束力。为此,我们若在第一类约束所允许的虚位移中间找到一些虚位移使第二类约束力在其上所作虚功之和为零，假设这些虚位移满足 j 个关系[34]

$$\sum_{i=1}^{N}(a_{\nu i}\delta x_i+b_{\nu i}\delta y_i+c_{\nu i}\delta z_i)=0 \quad (\nu=1,2,\cdots,j) \qquad (5\text{-}231)$$

其中 $a_{\nu i},b_{\nu i},c_{\nu i}$ 为坐标和时间的函数，一般说来，关系(5-231)与约束(5-226)没有任何联系。如果限于研究使第二类约束反力的虚功为零的虚位移，即满足

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_{i2}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \qquad (5\text{-}232)$$

则原理(5-230)有通常的形式

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{F}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \qquad (5\text{-}233)$$

为由原理(5-233)导出系统的拉格朗日方程，我们选 $n=3N-l_1$ 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 使得(5-225)成为恒等式，即

$$f_{\rho_1}(x_1(q_s,t),y_1(q_s,t),z_1(q_s,t),\cdots,\\ x_N(q_s,t),y_N(q_s,t),z_N(q_s,t),t)\equiv0$$

而(5-226)成为

$$\varphi_{\rho_2}(q_1,q_2,\cdots,q_n,t)=0 \quad (\rho_2=1,2,\cdots,l_2) \qquad (5\text{-}234)$$

其中

$$\varphi_{\rho_2}=\overline{\Psi}_{\rho_2}(x_1(q_s,t),y_1(q_s,t),z_1(q_s,t),\cdots,\\ x_N(q_s,t),y_N(q_s,t),z_N(q_s,t),t) \qquad (5\text{-}235)$$

于是，按通常的步骤，可将原理(5-233)表为形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\partial T'}{\partial q_s}+Q_s\right)\delta q_s=0 \qquad (5\text{-}236)$$

在选取广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$之后，关系(5-231)可写成形式

$$\sum_{s=1}^{n} A_{\nu s}\delta q_s=0 \quad (\nu=1,2,\cdots,j) \qquad (5\text{-}237)$$

其中

$$A_{\nu s}=\sum_{i=1}^{N}\left(a_{\nu i}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+b_{\nu i}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+c_{\nu i}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right) \qquad (5\text{-}238)$$

由(5-236)和(5-237)，利用通常的拉格朗日乘子法，可得到方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\nu=1}^{j}\lambda_\nu A_{\nu s} \qquad (5\text{-}239)$$

$$(s=1,2,\cdots,n)$$

方程(5-239)就是包含伺服约束系统的带乘子的拉格朗日方程。方程(5-239)联同约束(5-234)给出相对 $n+j$ 个变量 q_1，$q_2,\cdots,q_n,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_j$ 的 $n+l_2$ 个方程。如果 $l_2>j$，那么一般说来问题是不可能的；如果 $l_2<j$，那么问题是不确定的；如果 $l_2=j$，方程的解就确定系统的运动。

下面研究几种特殊情形。

(1) 设由(5-237)可解出 j 个 δq，

$$\delta q_{n-j+k}=\sum_{\xi=1}^{n-j} B_{n-j+k,\xi}\delta q_\xi \quad (k=1,2,\cdots,j) \qquad (5\text{-}240)$$

将(5-240)代入(5-236)，得到

$$\sum_{\xi=1}^{n-j}\left\{-\frac{d}{dt}\frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_\xi}+\frac{\partial T'}{\partial q_\xi}+Q_\xi+\sum_{k=1}^{j} B_{n-j+k,\xi}\right.$$

$$\cdot\left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n-j+k}}+\frac{\partial T}{\partial q_{n-j+k}}+Q_{n-j+k}\right)\Bigg\}\delta q_{\xi}=0$$

由δq_{ξ}的独立性，我们得到方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\xi}}-\frac{\partial T}{\partial q_{\xi}}-Q_{\xi}+\sum_{k=1}^{j}B_{n-j+k,\xi}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n-j+k}}-\frac{\partial T}{\partial q_{n-j+k}}-Q_{n-j+k}\right)=0$$

$$(\xi=1,2,\cdots,n-j) \qquad (5\text{-}241)$$

(2) 如果关系(5-240)归结为

$$\delta q_{n-j+k}=0 \quad (k=1,2,\cdots,j) \qquad (5\text{-}242)$$

则由δq_{ξ}的独立性，得到方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\xi}}-\frac{\partial T}{\partial q_{\xi}}=Q_{\xi} \quad (\xi=1,2,\cdots,n-j) \qquad (5\text{-}243)$$

(3) 如果第二类约束反力仅仅是障碍运动的辅助系统的接触作用，其坐标依赖于$q_1,q_2,\cdots,q_n$中的$q_{n-m+1},\cdots,q_n$，则关系(5-237)成为

$$\delta q_{n-m+1}=0,\cdots,\delta q_n=0 \qquad (5\text{-}244)$$

这时由原理(5-236)得到方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\eta}}-\frac{\partial T}{\partial q_{\eta}}=Q_{\eta} \quad (\eta=1,2,\cdots,n-m) \qquad (5\text{-}245)$$

2. 例题

一薄板Q，质量为m，放在固定光滑水平面上并在点C与一半径为R的圆盘P铰接，圆盘也放在同一水平面上，并且可绕其固定中心O转动。在点C与薄板质心G的联线上有一点A，其上作用有常力$\boldsymbol{F}$，此力平行于固定直线OX(图5-9)。一伺服电机作用在圆盘上，使得实现约束

$$\alpha-\beta=\frac{\pi}{2} \qquad (5\text{-}246)$$

其中 $\alpha=(OX,OC)$；$\beta=(OX,CA)$；

$OC=R$，$CA=a$，$CG=b$。

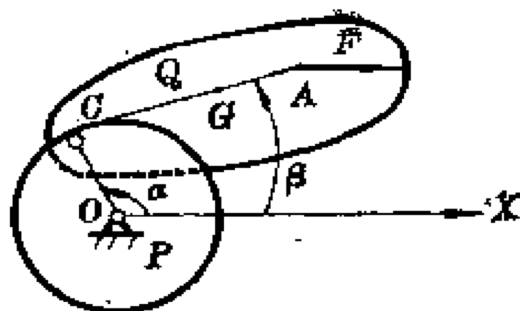


图 5-9

解：因圆盘 P 的位置仅依赖于参数 α，这属于情形(3)。因此，拉格朗日方程可单独应用于平板 Q。圆盘 P 的质量不影响运动。我们来列写平板的动能。

平板质心的动能为

$$T'=\frac{1}{2}m[R^2\dot{\alpha}^2+b^2\dot{\beta}^2+2Rb\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\alpha-\beta)]$$

平板相对质心的动能为

$$T''=\frac{1}{2}mk^2\dot{\beta}^2$$

其中 mk^2 为平板对质心的转动惯量。于是，平板动能为

$$T=T'+T''=\frac{1}{2}m[R^2\dot{\alpha}^2+b^2\dot{\beta}^2+2Rb\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\alpha-\beta)+k^2\dot{\beta}^2] \qquad (5\text{-}247)$$

力 $\boldsymbol{F}$ 的虚功为

$$\delta W=F\delta(R\cos\alpha+a\cos\beta)$$

由方程(5-245)给出对 β 的拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\beta}}-\frac{\partial T}{\partial\beta}=-Fa\sin\beta \qquad (5\text{-}248)$$

考虑到伺服约束(5-246)，有

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\beta}}=m[b^2\dot{\beta}+Rb\dot{\alpha}\cos(\alpha-\beta)+k^2\dot{\beta}]=m(b^2+k^2)\dot{\beta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \beta}=mRb\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin(\alpha-\beta)=mRb\dot{\beta}^2$$

因此，运动方程(5-248)有形式

$$m(b^2+k^2)\ddot{\beta}-mRb\dot{\beta}^2+Fa\sin\beta=0 \qquad (5\text{-}249)$$

第十节　拉格朗日力学的逆问题

拉格朗日力学指出，对一个确定的动势L，就可以按照方程(4-146)给出系统的运动微分方程。这是拉格朗日力学的正问题。

所谓拉格朗日力学的逆问题是指要求找到一个函数L使得一个二阶常微分方程组可写成拉格朗日方程(4-146)的形式。拉格朗日力学的逆问题是当代数学、力学和物理学界十分关注的问题。这里我们仅仅介绍一个大概。

1．问题的提出

完整保守力学系统的拉格朗日方程为(4-146)，即

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \quad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (5\text{-}250)$$

其中$L=T-V$为动势，T为动能，V为势能。对于确定的T、V按(5-250)运算，可得到n个二阶常微分方程。

现在给出一个二阶常微分方程组

$$\sum_{k=1}^{n}A_{sk}(q_m,\dot{q}_m,t)\ddot{q}_k+B_s(q_m,\dot{q}_m,t)=0 \quad (5\text{-}251)$$

$$(s,m=1,2,\cdots,n)$$

要求找到一个函数L，使得方程(5-251)可以写成形式(5-250)。这就是拉格朗日力学的逆问题。当然，一般说来，L亦不再是动势。

2. 函数 L 存在的条件

如果方程(5-251)中的系数 A_{sk}, B_s满足下述条件

$$A_{sk}=A_{ks} \tag{5-252}$$

$$\frac{\partial A_{sk}}{\partial \dot{q}_m}=\frac{\partial A_{mk}}{\partial \dot{q}_s} \tag{5-253}$$

$$\frac{\partial B_s}{\partial \dot{q}_k}+\frac{\partial B_k}{\partial \dot{q}_s}=2\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{m=1}^{n}\dot{q}_m\frac{\partial}{\partial q_m}\right\}A_{sk} \tag{5-254}$$

$$\frac{\partial B_s}{\partial q_k}-\frac{\partial B_k}{\partial q_s}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{m=1}^{n}\dot{q}_m\frac{\partial}{\partial q_m}\right\}\left(\frac{\partial B_s}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial B_k}{\partial \dot{q}_s}\right)$$

$$(s,k,m=1,2,\cdots,n) \tag{5-255}$$

可以证明能够找到函数 L，使方程(5-251)成为方程(5-250)。详细证明可参看 Santilli.R.M. 的书[29]。

3. 函数 L 的构造方法

在上述条件(5-252)、(5-253)、(5-254)和(5-255)下，L 是可以找到的，但是问题不是唯一的。实际上，将方程(5-250)展开，有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial t}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \tag{5-256}$$

比较(5-256)与(5-251)，得到

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k}=A_{sk}\quad (s,k=1,2,\cdots,n) \tag{5-257}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial t}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=B_s \tag{5-258}$$

$$(s=1,2,\cdots,n)$$

方程(5-257)、(5-258)是 n^2+n 个偏微分方程，仅有一个未知函数 L，因此问题是超定的。当然，只要能找到哪怕是一个 L，问题就算解决了。条件(5-252)——(5-255)容易由(5-

257)和(5-258)得到验证。

下面由条件(5-252)——(5-255)，方程(5-257)和(5-258)给出构造拉格朗日函数L的方法。

方程(5-257)有通解

$$L(q_m,\dot{q}_m,t)=K(q_m,\dot{q}_m,t)+\sum_{k=1}^{n}D_k(q_m,t)\dot{q}_k+C(q_m,t) \qquad (5\text{-}259)$$

其中$K(q_m,\dot{q}_m,t)$是一个特解。将(5-259)代入(5-257)和(5-258)，得到

$$\frac{\partial^2 K}{\partial\dot{q}_{k_1}\partial\dot{q}_{k_2}}=A_{k_1k_2} \qquad (k_1,k_2=1,2,\cdots,n) \qquad (5\text{-}260)$$

$$\left(\frac{\partial D_{k_1}}{\partial t}-\frac{\partial C}{\partial q_{k_1}}\right)+\sum_{k_2=1}^{n}\left(\frac{\partial D_{k_1}}{\partial q_{k_2}}-\frac{\partial D_{k_2}}{\partial q_{k_1}}\right)\dot{q}_{k_2}$$
$$=B_{k_1}+\frac{\partial K}{\partial q_{k_1}}-\frac{\partial^2 K}{\partial\dot{q}_{k_1}\partial t}-\sum_{k_2=1}^{n}\frac{\partial^2 K}{\partial\dot{q}_{k_1}\partial q_{k_2}}\dot{q}_{k_2}$$
$$(k_1=1,2,\cdots,n) \qquad (5\text{-}261)$$

方程(5-260)的右边部分是已知的，因此可解出L中的第一项K。将所得到的K代入方程(5-261)，则方程(5-261)的右边也是已知的。为得到L中的第二项系数D_k所满足的方程，我们将(5-261)两边对$\dot{q}_{k_2}$求导数，有

$$\frac{\partial D_{k_1}}{\partial q_{k_2}}-\frac{\partial D_{k_2}}{\partial q_{k_1}}=\frac{\partial B_{k_1}}{\partial\dot{q}_{k_2}}-\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k_3=1}^{n}\dot{q}_{k_3}\frac{\partial}{\partial q_{k_3}}\right\}\frac{\partial^2 K}{\partial\dot{q}_{k_1}\partial\dot{q}_{k_2}}$$
$$+\frac{\partial^2 K}{\partial q_{k_1}\partial\dot{q}_{k_2}}-\frac{\partial^2 K}{\partial\dot{q}_{k_1}\partial q_{k_2}} \qquad (5\text{-}262)$$
$$(k_1,k_2=1,2,\cdots,n)$$

方程(5-262)右边部分都是已知的，设由此可解出D_k。为得到L中的第三项C所满足的方程，只要将(5-262)代入(5-

261)，于是有

$$\frac{\partial C}{\partial q_{k_1}}=\frac{\partial D_{k_1}}{\partial t}-B_{k_1}-\frac{\partial K}{\partial q_{k_1}}+\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_{k_1}\partial t}+\sum_{k_2=1}^{n}\frac{\partial^2 K}{\partial q_{k_1}\partial \dot{q}_{k_2}}\dot{q}_{k_2}$$
$$+\sum_{k_2=1}^{n}\frac{\partial B_{k_1}}{\partial \dot{q}_{k_2}}\dot{q}_{k_2}-\sum_{k_2=1}^{n}\Big\{\frac{\partial}{\partial t}$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\dot{q}_k\frac{\partial}{\partial q_k}\Big\}\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_{k_1}\partial \dot{q}_{k_2}}\dot{q}_{k_2} \qquad (5\text{-}263)$$

方程(5-263)的右边部分都是已知的，由此可解出C。

设所有条件(5-252)——(5-255)都满足，则(5-262)和(5-263)可以写得更简短些。实际上，将(5-261)和(5-254)代入(5-262)，得到

$$\frac{\partial D_{k_1}}{\partial q_{k_2}}-\frac{\partial D_{k_2}}{\partial q_{k_1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_{k_1}}{\partial \dot{q}_{k_2}}-\frac{\partial B_{k_2}}{\partial \dot{q}_{k_1}}\right)$$
$$+\left(\frac{\partial^2 K}{\partial q_{k_2}\partial \dot{q}_{k_1}}-\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_{k_2}\partial q_{k_1}}\right)=Z_{k_1k_2} \qquad (5\text{-}264)$$

将(5-260)和(5-254)代入(5-263)，得到

$$\frac{\partial C}{\partial q_{k_1}}=\frac{\partial D_{k_1}}{\partial t}-B_{k_1}-\frac{\partial K}{\partial q_{k_1}}+\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_{k_1}\partial t}+\sum_{k_2=1}^{n}\Big[\frac{\partial^2 K}{\partial q_{k_1}\partial \dot{q}_{k_2}}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_{k_1}}{\partial \dot{q}_{k_2}}-\frac{\partial B_{k_2}}{\partial \dot{q}_{k_1}}\right)\Big]\dot{q}_{k_2}=W_{k_1} \qquad (5\text{-}265)$$

这样，方程(5-260)、(5-264)和(5-265)给出构造拉格朗日函数的方法。由这些方程得到

$$K(q_m,\dot{q}_m,t)=\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\dot{q}_{k_1}\int_0^1 d\tau'\Big\{\Big[\int_0^1 d\tau A_{k_1k_2}(q,$$
$$\tau\dot{q},t)\Big]\dot{q}_{k_2}\Big\}(q,\tau'\dot{q},t) \qquad (5\text{-}266)$$

$$D_{k_1}=\sum_{k_2=1}^{n}\left[\int_0^1 d\tau\ \tau Z_{k_1k_2}(\tau q,t)\right]q_{k_2} \qquad (5\text{-}267)$$

$$C=\sum_{k=1}^{n}\left[\int_0^1 d\tau W_k(\tau q,t)\right]q_k \qquad (5\text{-}268)$$

必须注意，方程(5-260)、(5-264)和(5-265)一定要按顺序求解。首先，由(5-266)在已知 $A_{k_1k_2}$ 下计算出K；再由(5-264)计算出 $Z_{k_1k_2}$，由(5-267)解出 D_k；最后由(5-265)算出W_{k_1}，由(5-268)解出C。于是，函数L由(5-259)给出。

4. 例题

例1. 某二维非线性非保守系统的运动方程为

$$\left.\begin{aligned}&(\dot{q}_1+2\dot{q}_2)\ddot{q}_1+2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\ddot{q}_2+q_2\dot{q}_2\\&\qquad -q_1\dot{q}_2+q_1q_2+\frac{1}{2}q_2^2=0\\&2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\ddot{q}_1+(2\dot{q}_1+\dot{q}_2)\ddot{q}_2+q_1\dot{q}_1\\&\qquad -q_2\dot{q}_1+q_1q_2+\frac{1}{2}q_1^2=0\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}269)$$

试造出拉格朗日函数L，使之可写成拉格朗日形式(5-250)。

解：首先验证条件(5-252)、(5-253)、(5-254)和(5-255)。由(5-269)知

$$\left.\begin{aligned}&A_{11}=\dot{q}_1+2\dot{q}_2, &&A_{12}=2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\\&A_{21}=2(\dot{q}_1+\dot{q}_2), &&A_{22}=2\dot{q}_1+\dot{q}_2\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}270)$$

显然有 $A_{12}=A_{21}$，条件(5-252)成立。又

$$\frac{\partial A_{12}}{\partial \dot{q}_2}=2, \qquad \frac{\partial A_{22}}{\partial \dot{q}_1}=2$$

$$\frac{\partial A_{21}}{\partial \dot{q}_1}=2, \qquad \frac{\partial A_{11}}{\partial \dot{q}_2}=2$$

则条件(5-253)成立。又

$$
\left.\begin{aligned}
B_1 &= q_2\dot{q}_2 - q_1\dot{q}_2 + q_1q_2 + \frac{1}{2}q_2^2 \\
B_2 &= q_1\dot{q}_1 - q_2\dot{q}_1 + q_1q_2 + \frac{1}{2}q_1^2
\end{aligned}\right\} \tag{5-271}
$$

我们有

$$
\frac{\partial B_1}{\partial \dot{q}_2} + \frac{\partial B_2}{\partial \dot{q}_1} = q_2 - q_1 + q_1 - q_2 = 0
$$

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{m=1}^{2} \dot{q}_m \frac{\partial}{\partial q_m}\right) A_{12} = \dot{q}_1 \frac{\partial A_{12}}{\partial q_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial A_{12}}{\partial q_2} = 0
$$

$$
\frac{\partial B_1}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial B_1}{\partial \dot{q}_1} = 0
$$

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{m=1}^{2} \dot{q}_m \frac{\partial}{\partial q_m}\right) A_{11} = 0
$$

$$
\frac{\partial B_2}{\partial \dot{q}_2} + \frac{\partial B_2}{\partial \dot{q}_2} = 0
$$

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{m=1}^{2} \dot{q}_m \frac{\partial}{\partial q_m}\right) A_{22} = 0
$$

因此，条件(5-254)也成立。最后，因

$$
\frac{\partial B_1}{\partial q_2} - \frac{\partial B_2}{\partial q_1} = (\dot{q}_2 + q_1 + q_2) - (\dot{q}_1 + q_2 + q_1) = \dot{q}_2 - \dot{q}_1
$$

$$
\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{m=1}^{2} \dot{q}_m \frac{\partial}{\partial q_m}\right\}\left(\frac{\partial B_1}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial B_2}{\partial \dot{q}_1}\right) = \sum_{m=1}^{2} \dot{q}_m \frac{\partial}{\partial q_m}[2(q_2 - q_1)] = 2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)
$$

故条件(5-255)也成立。

其次，按(5-260)、(5-264)、(5-265)、(5-266)、(5-267)和(5-268)来构造函数 L。

由(5-270)和(5-266)，有

$$
\begin{aligned}
K = & \dot{q}_1\int_0^1 d\tau'\left\{\int_0^1 d\tau(\dot{q}_1+2\dot{q}_2)\tau\dot{q}_1\right\}(\tau'\dot{q}) \\
& +\dot{q}_1\int_0^1 d\tau'\left\{\int_0^1 d\tau\cdot 2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\tau\dot{q}_2\right\}(\tau'\dot{q}) \\
& +\dot{q}_2\int_0^1 d\tau'\left\{\int_0^1 d\tau\cdot 2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\tau\dot{q}_1\right\}(\tau'\dot{q}) \\
& +\dot{q}_2\int_0^1 d\tau'\left\{\int_0^1 d\tau\cdot(2\dot{q}_1+\dot{q}_2)\tau\dot{q}_2\right\}(\tau'\dot{q}) \\
= & \dot{q}_1\left[\int_0^1 \tau'^2\dot{q}_1(\dot{q}_1+2\dot{q}_2)\ \frac{1}{2}d\tau'+\int_0^1 \tau'^2\dot{q}_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)d\tau'\right] \\
& +\dot{q}_2\left[\int_0^1 \tau'^2\dot{q}_1(\dot{q}_1+\dot{q}_2)d\tau'+\int_0^1 \tau'^2(2\dot{q}_1+\dot{q}_2)\ \frac{1}{2}d\tau'\right] \\
= & \dot{q}_1\left[\frac{1}{6}\dot{q}_1(\dot{q}_1+2\dot{q}_2)+\frac{1}{3}\ \dot{q}_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\right]+\dot{q}_2\left[\frac{1}{3}\dot{q}_1(\dot{q}_1\right. \\
& \left.+\dot{q}_2)+\frac{1}{6}\dot{q}_2(2\dot{q}_1+\dot{q}_2)\right] \\
= & \frac{1}{6}(\dot{q}_1^3+\dot{q}_2^3)+\dot{q}_1^2\dot{q}_2+\dot{q}_1\dot{q}_2^2
\end{aligned}
$$

将所得的K代入(5-264)可求出 $Z_{k_1k_2}$

$$Z_{11}=0$$

$$
\begin{aligned}
Z_{12} & =\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_1}{\partial\dot{q}_2}-\frac{\partial B_2}{\partial\dot{q}_1}\right)+\frac{\partial^2 K}{\partial q_1\partial\dot{q}_2}-\frac{\partial^2 K}{\partial\dot{q}_1\partial q_2} \\
& =\frac{1}{2}[q_2-q_1-(q_1-q_2)]=q_2-q_1
\end{aligned}
$$

$$Z_{21}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_2}{\partial\dot{q}_1}-\frac{\partial B_1}{\partial\dot{q}_2}\right)=q_1-q_2$$

$$Z_{22}=0$$

利用(5-267)，我们有

$$D_1=\int_0^1\tau Z_{11}(\tau q)q_1 d\tau+\int_0^1\tau Z_{12}(\tau q)q_2 d\tau$$

$$=\int_0^1 \tau^2(q_2-q_1)q_2 d\tau=\frac{1}{3}(q_2^2-q_1q_2)$$

$$D_2=\int_0^1 \tau Z_{21}(\tau q)q_1 d\tau+\int_0^1 \tau Z_{22}(\tau q)q_2 d\tau$$

$$=\int_0^1 \tau^2(q_1-q_2)q_1 d\tau=\frac{1}{3}(q_1^2-q_1q_2)$$

因此

$$\sum_{k=1}^{2} D_k\dot{q}_k=\frac{1}{3}\dot{q}_1(q_2^2-q_1q_2)+\frac{1}{3}\dot{q}_2(q_1^2-q_1q_2)$$

$$=\frac{1}{3}(q_2^2\dot{q}_1+q_1^2\dot{q}_2)-\frac{1}{3}q_1q_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)$$

将所得K、D_k代入方程(5-265)，得

$$W_1=\frac{\partial D_1}{\partial t}-B_1-\frac{\partial K}{\partial q_1}+\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_1\partial t}+\frac{\partial^2 K}{\partial q_1\partial \dot{q}_1}\dot{q}_1$$

$$+\left[\frac{\partial^2 K}{\partial q_1\partial \dot{q}_2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_1}{\partial \dot{q}_2}-\frac{\partial B_2}{\partial \dot{q}_1}\right)\right]\dot{q}_2$$

$$=-(q_2\dot{q}_2-q_1\dot{q}_2+q_1q_2+\frac{1}{2}q_2^2)+(q_2-q_1)\cdot\dot{q}_2$$

$$=-q_1q_2-\frac{1}{2}q_2^2$$

$$W_2=\frac{\partial D_2}{\partial t}-B_2-\frac{\partial K}{\partial q_2}+\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_2\partial t}+\left[\frac{\partial^2 K}{\partial q_2\partial \dot{q}_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_2}{\partial \dot{q}_1}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial B_1}{\partial \dot{q}_2}\right)\right]\dot{q}_1+\frac{\partial^2 K}{\partial q_2\partial \dot{q}_2}\dot{q}_2$$

$$=-(q_1\dot{q}_1-q_2\dot{q}_1+q_1q_2+\frac{1}{2}q_1^2)+(q_1-q_2)\dot{q}_1$$

$$=-q_1q_2-\frac{1}{2}q_1^2$$

将所得 W_1，W_2 代入(5-268)，得到

$$C=\int_0^1 W_1(\tau q)q_1 d\tau+\int_0^1 W_2(\tau q)q_2 d\tau$$

$$=\int_0^1 -\tau^2\left(q_1q_2+\frac{1}{2}q_2^2\right)q_1 d\tau+\int_0^1 -\tau^2\left(q_1q_2+\frac{1}{2}q_1^2\right)q_2 d\tau$$

$$=-\frac{1}{3}q_1\left(q_1q_2+\frac{1}{2}q_2^2\right)-\frac{1}{3}q_2\left(q_1q_2+\frac{1}{2}q_1^2\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(q_1^2q_2+q_1q_2^2\right)$$

于是所求拉格朗日函数为

$$L=K+\sum_{k=1}^{2}D_k\dot{q}_k+C$$

$$=\frac{1}{6}(\dot{q}_1^3+\dot{q}_2^3)+\dot{q}_1^2\dot{q}_2+\dot{q}_1\dot{q}_2^2+\frac{1}{3}(q_2^2\dot{q}_1+q_1^2\dot{q}_2)$$

$$-\frac{1}{3}q_1q_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)-\frac{1}{2}(q_1^2q_2+q_1q_2^2) \qquad (5\text{-}272)$$

容易验证由 L 给出的方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \qquad (s=1,2)$$

与运动方程(5-269)一致。

例2. 试将运动方程

$$\ddot{q}+\gamma\dot{q}=0 \qquad (\dot{q}>0) \qquad (5\text{-}273)$$

其中 γ 为常数，写成拉格朗日形式。

解： 显然，方程(5-273)不满足条件(5-254)。然而，将(5-273)写成等价形式

$$e^{\gamma t}\ddot{q}+e^{\gamma t}\gamma\dot{q}=0 \qquad (5\text{-}274)$$

时，条件(5-252)——(5-255)都满足。因此，可按上述方法造出 L 来。

方程(5-260)给出

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^2}=e^{\gamma t}$$

方程(5-263)给出

$$\frac{\partial C}{\partial q}-\frac{\partial D}{\partial t}=-e^{\gamma t}\gamma\dot{q}+\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}\partial t}$$

而解(5-266)、(5-267)、(5-268)成为

$$K=\dot{q}\int_0^1 d\tau'\left[\dot{q}\int_0^1 d\tau e^{\gamma t}\right](\tau'\dot{q})=\frac{1}{2}e^{\gamma t}\dot{q}^2$$

$$D=C=0$$

于是拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}e^{\gamma t}\dot{q}^2 \tag{5-275}$$

例3. 某力学系统的运动方程为

$$\sum_{k=1}^{n} c_{sk}(t)\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\dot{c}_{sk}(t)\dot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}a_{sk}(t)q_k=0$$

$$(s=1,2,\cdots,n) \tag{5-276}$$

其中 $a_{sk}=a_{ks}$, $c_{sk}=c_{ks}$, 试将其写成拉格朗日形式。

解: 由已知条件容易判断，条件(5-252)——(5-255)都满足。

方程(5-260)成为

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k}=c_{sk}(t)$$

解(5-266)成为

$$K=\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\dot{q}_s\int_0^1 d\tau'\left\{\int_0^1 d\tau c_{sk}(t)\dot{q}_k\right\}(\tau'\dot{q})$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}c_{sk}(t)\dot{q}_s\dot{q}_k$$

将 B_s 及K代入方程(5-264)，得到

$$Z_{sk}=0$$

将 Z_{sk} 代入解(5-267)，得到

$$D_k=0$$

将 B_s，K，D_s 代入方程(5-265)得到

$$W_s=-\sum_{k=1}^{n}a_{sk}(t)q_k$$

于是解(5-268)给出

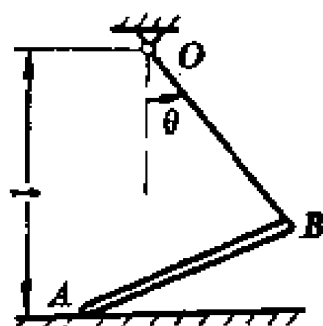
$$C=-\int_0^1\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{sk}(t)\tau q_k q_s d\tau=-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{sk}(t)q_k q_s$$

因此，所求拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}c_{sk}(t)\dot{q}_s\dot{q}_k-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{sk}(t)q_s q_k \tag{5-277}$$

第五章　习　　题

5-1　质量为m，长为l的匀质杆AB，一端B以长l的软绳OB拉住，另一端A沿光滑的水平轨道运动（题5-1图）。当其平衡时，OB在铅垂位置而AB在水平位置。求其作微振动的周期。



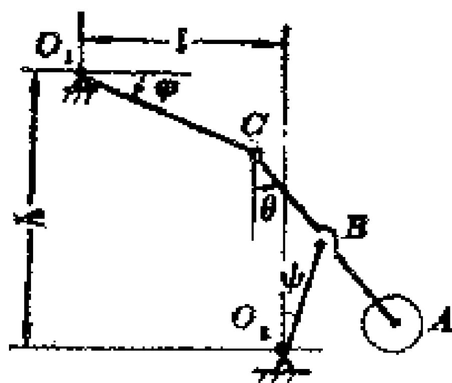
题 5-1 图

答：$2\pi\sqrt{\dfrac{2l}{g}}$

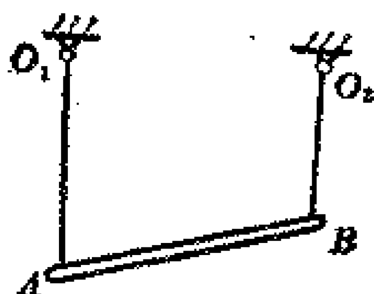
5-2　图示一振动系统。小球A的质量为m，与ABC杆以理想铰链连接。各杆的质量可以不计。平衡时，O_1C杆在

水平位置，ABC 杆以及 O_2B 杆在铅垂位置。设 $O_1C=l$，$O_2B=BC=b$，$AB=a$，$a>b$，求系统作微振动的周期。

答：$2\pi\dfrac{a+b}{\sqrt{(a-b)g}}$



题 5-2 图



题 5-3 图

5-3　匀质杆 AB 以长 l_1、l_2 的软绳O_1A、O_2B 挂起如图示。平衡时，软绳在铅垂位置。求微振动的周期。

答：$2\pi\sqrt{\dfrac{2l_1l_2}{(l_1+l_2)g}}$

5-4　试由方程(5-54)导出下述关系：

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial\omega_k}\omega_k-T^*\right]=\sum_{k=1}^{n}P_k^*\omega_k-\frac{\partial T^*}{\partial t}$$

由此证明，如果 T^* 中不显含 t，且

$$P^*=-\frac{\partial V^*}{\partial\pi_k}$$

则存在积分

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial\omega_k}\omega_k-T^*+V^*=\text{const}$$

5-5　半径为R、质量为m的均质圆盘中心用刚度为c的弹簧固定到墙上，圆盘可沿固定导轨无滑动地滚动，而且滚动摩擦力偶臂等于k。开始时圆盘处于静止，并且弹簧变形等于x_0。问过了时间$t=n\pi\sqrt{\frac{bm}{c}}$弹簧变形将会怎样？

答：$x_0-4n\frac{kmg}{cR}$　　$\left(n\leqslant\frac{Rcx_0-kmg}{4kmg}\right)$

5-6　放在粘性液体中的振子用运动方程

$$m\ddot{x}+\beta\dot{x}+cx=0$$

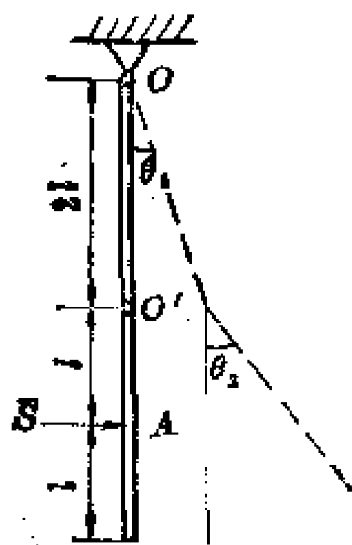
来描述。在振子运动时求使等式

$$\frac{dV(x,\dot{x})}{dt}=-\frac{1}{2}(m\dot{x}^2+cx^2)=-E$$

成立的正定函数$V(x,\dot{x})$。

提示：寻找待定系数的x，$\dot{x}$二次型的一类函数V。

答：$V=\frac{m^2}{2\beta}\dot{x}^2+\frac{m}{2}x\dot{x}+\frac{2mc+\beta^2}{4\beta}x^2$



题 5-7 图

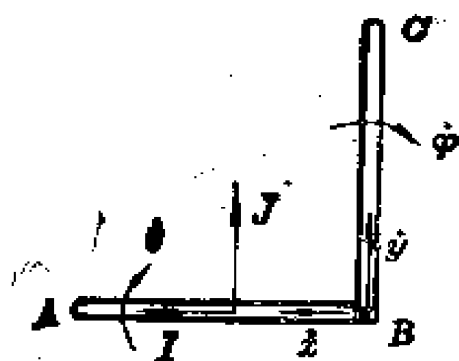
5-7　长为$2l$、质量为M的均质直棒可绕铰链O于铅垂面内自由转动。在此棒的下端以铰链O'联一与之相同的第二棒。当二棒处于静止时，在第二棒中点A处加一与棒垂直的冲量S，求冲击后二棒的角速度及A点的速度。

答：　$\dot{\theta}_2=\frac{3}{7}\frac{S}{Ml}$，

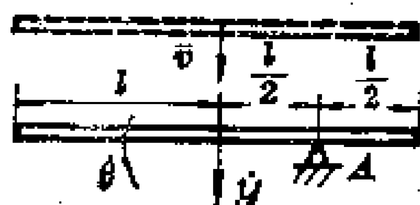
$$\dot{\theta}_1=\frac{3}{14}\frac{S}{Ml},\qquad v_A=\frac{6}{7}\frac{S}{M}$$

5-8 两个均质杆 AB, BC, 每杆长 $2a$, 光滑地在 B 铰接，成直角地放在水平桌面上。一冲量作用在 AB 的中点并且两杆象刚体一样地开始运动。试确定冲量的方向并证明 A, C 的速度之比为 $\sqrt{13}:1$

提示：令 B 的速度为 $(\dot{x},\ \dot{y})$，杆的角速度为 $\dot{\theta}$，$\dot{\varphi}$，列写打击方程，并令 $\dot{\theta}=\dot{\varphi}$。



题 5-8 图



题 5-9 图

5-9 长 $2l$ 的均质棒以垂直于其自身的速度 v 在图示平面内移动。此棒与支点 A 相碰于距离棒端 $\frac{l}{2}$ 处。设碰撞为非弹性的(即碰后不离开)，求碰后棒的角速度及质心的速度。

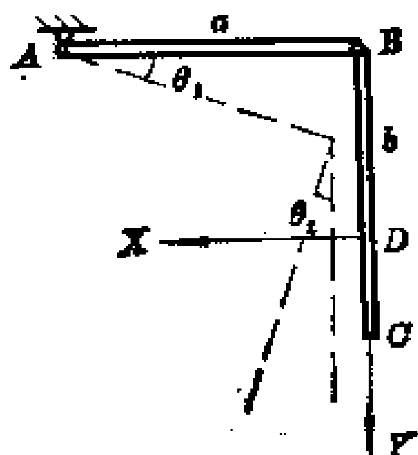
答： $\dot{\theta}=\frac{6v}{7l}$, $\dot{y}=\frac{3}{7}v$

5-10 两均匀杆 AB、BC，质量为 m_1 和 m_2，长为 a 和 b，自由地铰接于 B，并可绕固定点 A 转动。开始时，AB 是水平的，而 BC 是铅垂的。试证，如果 C 被释放，则离端点

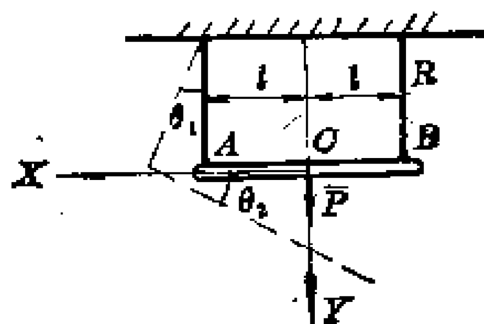
C为$\frac{1}{3}b$处的点D的初始路径可由方程

$$y^3=6\mathring{\delta}\left(1+\frac{2m_2}{m_1}\right)abx$$

来表示。



题 5-10 图



题 5-11 图

5-11 均质棒重P长$2l$，其两端悬于长为R的二平行绳上，此时棒的位置是水平的。如其中一绳断了，求在此瞬时杆的初始角加速度及杆质心的初始加速度。

答：$\ddot{x}_{co}=0$，　　$\ddot{y}_{co}=\frac{3}{4}g$，

$\ddot{\theta}_{10}=0$，　　$\ddot{\theta}_{20}=\frac{3}{4}\frac{g}{l}$

5-12 试由方程(5-162)导出积分

$$\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}m\omega^2a^2(1-\cos^2\theta\cos^2\alpha)-mga\cos\theta\cos\alpha=h^*$$

5-13 试证明，在方程(5-152)中，如果

$$Q_s=-\frac{\partial V}{\partial q_s}$$

则有积分

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s - L_r - \frac{1}{2}\omega^2\sum_{i=1}^{N} m_i(x_i'^2 + y_i'^2) = h^*$$

其中 $L_r = T_r - V$.

5-14　试用相对运动动力学方程解题4-28，并求其相对平衡位置。

5-15　变质量单摆在阻力与速度成正比的介质中运动。摆的质量由于质点的离散按规律 $m = m(t)$ 变化，且离散微粒的相对速度等于零。已知摆长为 l，阻力 $R = \beta\dot{\varphi}$，求摆的运动微分方程。

答：　$\ddot{\varphi} + \frac{g\sin\varphi}{l} + \frac{\beta\dot{\varphi}}{m(t)l} = 0$



题 5-16 图

5-16　截面为 S 质量为 m_0 的圆柱形筒位于光滑水平导轨 OX 上。在压缩弹簧作用下活塞 A 通过面积为 S_0 的孔 B 将密度为 ρ 的液体挤出去。求筒的运动微分方程，已知活塞的运动规律 $l = l(t)$。

答：$m_0\ddot{x} + m(t)(\ddot{x} - \ddot{l}) = -\dot{m}(u - \dot{l})$

其中 $u = -\frac{\dot{m}}{\rho S_0} = \frac{S}{S_0}\dot{l}$，$m(t) = \rho S[L - l(t)]$.

5-17　试验证运动方程

$$\ddot{q} + \sin q = 0$$

满足条件(5-252)——(5-255)，并计算其拉格朗日函数。

5-18　试构造二维非保守非线性系统

$$q_1^2\ddot{q}_1+\frac{1}{2}q_1q_2\ddot{q}_2+q_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}q_1\dot{q}_2^2+(2q_1+q_2)=0$$

$$\frac{1}{2}q_1q_2\ddot{q}_1+q_2^2\ddot{q}_2+\frac{1}{2}q_2\dot{q}_1^2+q_2\dot{q}_2^2+t(q_1+2q_2)=0$$

的拉格朗日函数。

答： $L=\frac{1}{2}(q_1^2\dot{q}_1^2+q_1q_2\dot{q}_1\dot{q}_2+q_2^2\dot{q}_2^2)-t(q_1^2+q_1q_2+q_2^2)$

第六章 尼尔森方程*

德国学者尼尔森(Nielsén)在1935年得到了一种完整力学系统的运动方程。这种方程与第二类拉格朗日方程一样，是建立完整力学系统在广义坐标中的动力学微分方程的规则。

第一节 尼尔森方程的推导

我们由达朗伯——拉格朗日原理来推导尼尔森方程。达朗伯——拉格朗日原理为(3-13)，即

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{6-1}$$

假设所研究的完整力学系统有 n 个自由度，系统的位形可用 n 个广义坐标 q_1，$q_2,\cdots,q_n$ 来确定。

由(4-4)知，虚位移矢量 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 可用广义坐标的变分 δq_s 表示为

$$\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\delta q_s \tag{6-2}$$

将(6-2)代入(6-1)并改变求和顺序，得

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{N}\left(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}+\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\right)\right\}\delta q_s=0 \tag{6-3}$$

下面我们来证明一个重要关系：

$$\frac{\partial\ddot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_s}=2\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s}\quad(i=1,2,\cdots,N) \tag{6-4}$$

实际上，由(1-33)知点的加速度矢量可用广义加速度、广义速度和广义坐标表示为

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\ddot{q}_s+\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k \partial q_s}\dot{q}_s\dot{q}_k$$

$$+2\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s \partial t}\dot{q}_s+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial t^2} \tag{6-5}$$

上式两边对 $\dot{q}_s$ 求偏导数，得

$$\frac{\partial \ddot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_s}=2\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k \partial q_s}\dot{q}_k+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s \partial t}\right) \tag{6-6}$$

又因点的速度矢量为

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

因此

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s \partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s \partial t} \tag{6-7}$$

比较(6-6)与(6-7)，便得关系(6-4)。

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i \tag{6-8}$$

动能对时间的全导数为

$$\dot{T}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}_i \tag{6-9}$$

我们计算 T 对 q_s 以及 T 对 $\dot{q}_s$ 的偏导数，有

$$\frac{\partial T}{\partial q_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s} \tag{6-10}$$

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s}=\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_s}+\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \ddot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_s} \tag{6-11}$$

利用经典拉格朗日关系(4-8)及关系(6-4)，可将(6-11)表为

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s}=\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}+2\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s} \tag{6-12}$$

由(6-10)及(6-12)，我们得到

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}=\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s}-2\frac{\partial T}{\partial q_s} \tag{6-13}$$

考虑到(6-13)，可将原理(6-3)表为

$$\sum_{s=1}^{n}\left(2\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s}+Q_s\right)\delta q_s=0 \tag{6-14}$$

其中

$$Q_s=\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \quad (s=1,2,\cdots,n)$$

为广义力。

原理(6-14)可称为达朗伯——拉格朗日原理的尼尔森形式。由原理(6-1)变换至(6-14)尽管利用了关系(4-8)及(6-4)，但仍可由原理(6-14)出发，考虑到非完整约束条件而建立非完整系统的运动方程。

因为对于完整系统来说，原理(6-14)中的 δq_s 彼此独立，故由(6-14)得到方程

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s}-2\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{6-15}$$

方程(6-15)就是尼尔森方程。它实质上与第二类拉格朗日方程一样是建立完整力学系统在广义坐标中运动的动力学

微分方程的一种规则。尼尔森方程是对 n 个广义坐标 q_1，$q_2,\cdots,q_n$ 的 n 个二阶常微分方程。尼尔森方程积分之后可求得广义坐标为时间 t 及 $2n$ 个任意常数的函数

$$q_s=q_s(t,C_1,C_2,\cdots,C_{2n}) \tag{6-16}$$

其中任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_{2n}$，可由广义坐标的初始值 q_{s0} 及广义速度的初始值 $\dot{q}_{s0}$ 来确定。

尼尔森方程与第二类拉格朗日方程(4-21)的重要差别在于函数 T 的出现。在第二类拉格朗日方程中要计算 $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}$，而在尼尔森方程中要计算 $\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s}$。在某些情形尼尔森运算 $\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s}$ 可能比拉格朗日运算 $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}$ 要容易些。如果是这样的情形，那么利用尼尔森方程将比利用第二类拉格朗日方程要方便些。

尼尔森方程有重要的理论价值。尼尔森方程向高阶系统的推广便产生了采诺夫方程(Ценов, 1953)[37]和高阶拉格朗日方程(1962)[36]，尼尔森方程向非完整系统的推广便产生了广义尼尔森方程(参见第九章第七节)。

第二节　尼尔森方程的应用

应用尼尔森方程(6-15)来建立完整力学系统的运动微分方程的步骤与应用第二类拉格朗日方程的步骤一样。不同的仅在于需计算 $\dot{T}$ 及 $\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s}$。

例1.　一质点沿光滑曲线 $y^3+ax^2=0(a>0)$的凹边以速

度$\frac{2}{3}(2ag)^{1/2}$从原点抛出，X轴为水平。试证速度的铅垂分量为常数（尼科梅迪（Nicomedi）问题）。

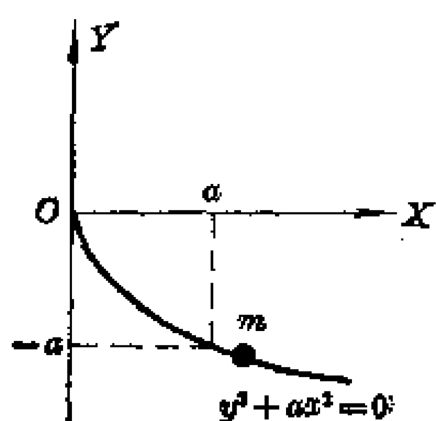


图 6-1

证明：质点沿平面曲线运动有一个自由度。取铅垂坐标y为广义坐标（图 6-1）。因

$$y^3+ax^2=0 \tag{6-17}$$

将(6-17)对时间t求导数，得

$$3y^2\dot{y}+2ax\dot{x}=0$$

由此及(6-17)得

$$\dot{x}^2=-\frac{9y}{4a}\dot{y}^2 \tag{6-18}$$

质点的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=\frac{1}{2}m\dot{y}^2\left(1-\frac{9y}{4a}\right) \tag{6-19}$$

广义力为

$$Q_y=-mg \tag{6-20}$$

由(6-19)知

$$\dot{T}=m\left[\dot{y}\ddot{y}\left(1-\frac{9y}{4a}\right)+\frac{1}{2}\dot{y}^2\left(-\frac{9\dot{y}}{4a}\right)\right]$$

$$\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{y}}=m\left[\ddot{y}\left(1-\frac{9y}{4a}\right)-\frac{27}{8a}\dot{y}^2\right]$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{1}{2}m\dot{y}^2\left(-\frac{9}{4a}\right)$$

因此，尼尔森方程

$$\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{y}}-2\frac{\partial T}{\partial y}=Q_y$$

成为

$$m\left[\ddot{y}\left(1-\frac{9y}{4a}\right)-\frac{27}{8a}\dot{y}^2\right]-2\times\frac{1}{2}m\dot{y}^2\left(-\frac{9}{4a}\right)=-mg$$

即

$$\ddot{y}\left(1-\frac{9y}{4a}\right)-\frac{9}{8a}\dot{y}^2=-g \tag{6-21}$$

将(6-21)两边乘以 $\dot{y}$ 并积分，得

$$\frac{1}{2}\dot{y}^2\left(1-\frac{9y}{4a}\right)+gy=h \tag{6-22}$$

其中 h 为任意常数。方程(6-22)实际上是能量积分。为确定任意常数 h，将初始条件 $t=0$，$y=0$，$\dot{y}=\frac{2}{3}(2ag)^{1/2}$ 代入(6-22)，便得

$$h=\frac{4}{9}ag \tag{6-23}$$

将(6-23)代入(6-22)，得

$$\frac{1}{2}\dot{y}^2\left(1-\frac{9y}{4a}\right)-\frac{4}{9}ag\left(1-\frac{9y}{4a}\right)=0 \tag{6-24}$$

由约束方程

$$y^3+ax^2=0$$

知

$$y\leqslant 0$$

故

$$1-\frac{9y}{4a}\geqslant 1$$

因此可由(6-24)消去因子 $1-\frac{9y}{4a}\neq 0$ 而得

$$\dot{y}^2=\frac{8}{9}ag=\text{const} \tag{6-25}$$

方程(6-25)表明点的速度的铅垂分量是常数。

例2. 质量为m的质点被自然长为a、刚度为c的n个弹簧拴于正n多边形的固定角点，其外接圆半径为b。如果质点在多边形平面上轻轻地偏离位置，它将产生直线的自由振动。求此微振动的频率。

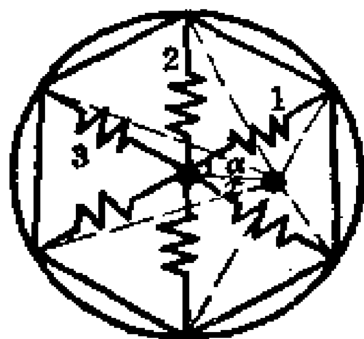


图 6-2

解：为求微振动的频率需建立点的运动微分方程。设质点沿与某一弹簧成任意角α的方向上移动一小位移x，取x为广义坐标（图6-2）。

质点的动能为

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{6-26}$$

弹簧势能为（以自然长处为零点）

$$V=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(l_i-a)^2 \tag{6-27}$$

其中l_i为第i个弹簧的长度。

第i个弹簧长度l_i是以x，b为边而夹角为$\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha$的三角形的第三边，故有

$$l_i=\left\{x^2+b^2-2bx\cos\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

因x是小量，将l_i展开为级数

$$l_i=b+\frac{\partial l_i}{\partial x}\bigg|_{x=0}x+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 l_i}{\partial x^2}\bigg|_{x=0}\cdot x^2+\cdots$$

而

$$\frac{\partial t_i}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\frac{1}{2}\left\{x^2+b^2-2bx\cos\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\left\{2x-2b\cos\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]\right\}\bigg|_{x=0}$$

$$=-\cos\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]$$

$$\frac{\partial^2 l_i}{\partial x^2}\bigg|_{x=0}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left\{x^2+b^2-2bx\cos\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\alpha\right]\right\}^{-\frac{3}{2}}\left\{2x-2b\cos\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]\right\}^2\bigg|_{x=0}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{x^2+b^2-2bx\cos\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\alpha\right]\right\}^{-\frac{1}{2}}\cdot 2\bigg|_{x=0}$$

$$=\frac{1}{b}-\frac{1}{b}\cos^2\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]$$

于是

$$l_i=b-x\cos\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]+\frac{1}{2b}x^2$$

$$-\frac{1}{2b}x^2\cos^2\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]+\cdots$$

因此

$$(l_i-a)^2=\left\{b-a-x\cos\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]+\frac{1}{2b}x^2\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2b}x^2\cos\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]-\cdots\right\}^2$$

$$=(b-a)^2-2(b-a)x\cos\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]$$

$$+x^2\cos\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]+2(b-a)\frac{1}{2b}\Big\{x^2$$

$$-x^2\cos^2\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]\Big\}+\cdots$$

$$=(b-a)^2-2(b-a)x\cos\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)+\alpha\right]$$

$$+\left(1-\frac{a}{2b}\right)x^2+\frac{a}{2b}x^2\cos\left[\frac{4\pi}{n}(i-1)+2\alpha\right]+\cdots$$

于是势能为

$$V=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}c\Big\{(b-a)^2-2(b-a)x\cos\Big[\frac{2\pi}{n}(i-1)$$

$$+a\Big]+\left(1-\frac{a}{2b}\right)x^2+\frac{ax^2}{2b}\cos\left[\frac{4\pi}{n}(i-1)+2a\right]+\cdots\Big\} \tag{6-28}$$

容易证明：

$$\sum_{i=1}^{n}\cos\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)\right]=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sin\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)\right]=0 \quad (n\geqslant 2) \tag{6-29}$$

因此(6-28)成为

$$V=\frac{1}{2}c(b-a)^2n+\frac{1}{2}cn\left(1-\frac{a}{2b}\right)x^2+\cdots \tag{6-30}$$

现在建立尼尔森方程。因

$$T=m\dot{x}\ddot{x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}=m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0$$

$$Q_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=-cn\left(1-\frac{a}{2b}\right)x$$

故尼尔森方程

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{x}}-2\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x$$

成为

$$m\ddot{x}=-cn\left(1-\frac{a}{2b}\right)x$$

即

$$\ddot{x}+\frac{cn}{m}\left(1-\frac{a}{2b}\right)x=0 \tag{6-31}$$

方程(6-31)便是质点微振动的方程，故微振动频率为

$$k=\sqrt{\frac{cn}{m}\left(1-\frac{a}{2b}\right)} \tag{6-32}$$

例3. 一质量为M的对称陀螺支在固定点O上，在重力作用下运动。设陀螺质心至O点距离为h，对质心的主转动惯量为A，A，C。试建立陀螺的运动微分方程。

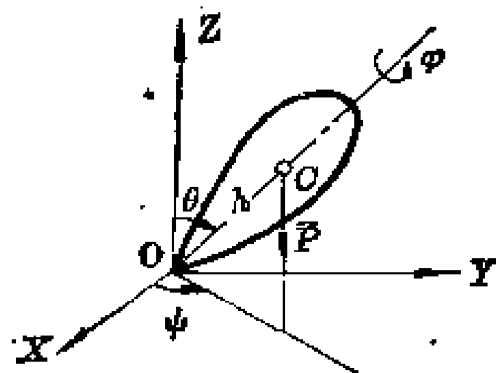


图 6-3

解: 陀螺运动是一个刚体绕定点转动问题，有三个自由度。取欧拉角ψ（进动角）、θ（章动角)及φ（自转角)为广义坐标（图 6-3)。陀螺的动能T等于质量集中在质心的动能T'加上相对质心转动的动能T''。因质心的坐

标为

$$x_c=h\sin\theta\cos\psi$$
$$y_c=h\sin\theta\sin\psi$$
$$z_c=h\cos\theta$$

故 $$\dot{x}_c^2+\dot{y}_c^2+\dot{z}_c^2=h^2(\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta)$$

于是 $$T'=\frac{1}{2}Mh^2(\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta)$$

对称陀螺相对质心转动的动能 T'' 按(4-35)为

$$T''=\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)$$

其中 p，q，r 按(4-36)为

$$p=\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi+\dot{\theta}\cos\varphi$$
$$q=\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi-\dot{\theta}\sin\varphi$$
$$r=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}$$

因此

$$T''=\frac{1}{2}A(\dot{\psi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)+\frac{1}{2}C(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})^2$$

于是系统动能为

$$T=T'+T''=\frac{1}{2}(A+Mh^2)(\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta)+\frac{1}{2}C(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})^2 \tag{6-33}$$

现在计算广义力。因陀螺仅受重力作用，重力的功为

$$\delta A=-Mg\delta z_c=Mg\sin\theta\cdot h\delta\theta$$

故广义力为

$$\left.\begin{aligned}Q_\theta&=Mgh\sin\theta\\Q_\psi&=Q_\varphi=0\end{aligned}\right\} \tag{6-34}$$

为建立尼尔森方程，进行下列计算：

$$\dot{T}=(A+Mh^2)(\dot\theta\ddot\theta+\dot\psi\ddot\psi\sin^2\theta+\dot\psi^2\dot\theta\sin\theta\cos\theta)$$
$$+C(\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi)(\psi\cos\theta-\dot\psi\dot\theta\sin\dot\theta+\ddot\varphi)$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\theta}=(A+Mh^2)(\ddot\theta+\dot\psi^2\sin\theta\cos\theta)$$
$$+C(\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi)(-\dot\psi\sin\theta)$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\psi}=(A+Mh^2)(\ddot\psi\sin^2\theta+2\dot\psi\dot\theta\sin\theta\cos\theta)$$
$$+C\cos\theta(\psi\cos\theta-\dot\psi\dot\theta\sin\theta+\ddot\varphi)$$
$$+C(\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi)(-\dot\theta\sin\theta)$$

$$\frac{\partial\dot T}{\partial\dot\varphi}=C(\psi\cos\theta-\dot\psi\dot\theta\sin\theta+\ddot\varphi)$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta}=(A+Mh^2)\dot\psi^2\sin\theta\cos\theta$$
$$+C(\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi)(-\dot\psi\sin\theta)$$

$$\frac{\partial T}{\partial\psi}=0,\qquad\frac{\partial T}{\partial\varphi}=0$$

于是陀螺的尼尔森方程

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\psi}-2\frac{\partial T}{\partial\psi}=Q_\psi$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\theta}-2\frac{\partial T}{\partial\theta}=Q_\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}-2\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q_\varphi$$

成为

$$(A+Mh^2)(\ddot\psi\sin^2\theta+2\dot\psi\dot\theta\sin\theta\cos\theta)+C\cos\theta(\ddot\psi\cos\theta$$
$$-\dot\psi\dot\theta\sin\theta+\ddot\varphi)+C(\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi)(-\dot\theta\sin\theta)=0$$

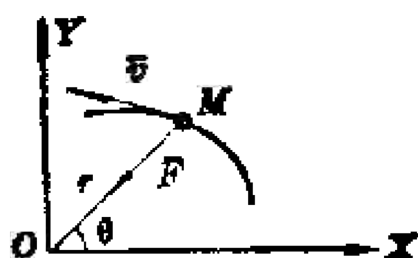
$$\left.\begin{aligned}(A+Mh^2)(\ddot{\theta}-\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta)+C(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})\dot{\psi}\sin\theta\\=Mgh\sin\theta\\C(\ddot{\psi}\cos\theta-\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta+\ddot{\varphi})=0\end{aligned}\right\}\tag{6-35}$$

第六章　习　　题

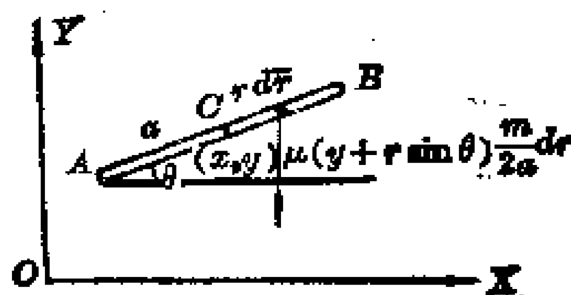
6-1　尼尔森方程(6-15)的推导过程用到了哪两个重要关系式？尼尔森方程适用于怎样的约束系统？（完整或非完整，稳定或不稳定，双面或单面，理想或非理想？）并证明等式

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}$$

6-2　利用尼尔森方程建立质点在有心力作用下的运动微分方程。



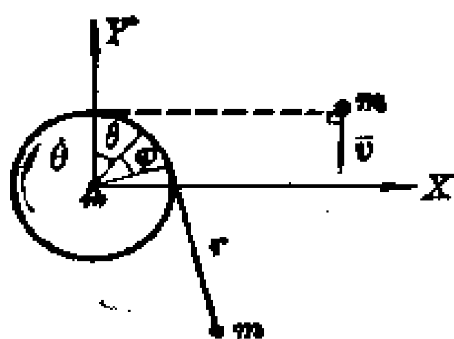
题 6-2 图



题 6-3 图

6-3　一质量为 m 长为 $2a$ 的均质杆 AB 在光滑桌面上自由运动。如果杆的各点受到桌面上固定线的吸引，引力与质量以及点到此固定线的距离成正比，比例系数为 μ。试用尼尔森方程建立杆在给定力场中的运动方程。

6-4 一质量为 m 的质点拴于轻线的一端，此轻线在质量为M的轮子上，轻线的另一端拴于轮缘上。开始时线是直的，长为 l。轮子（半径为 a，回转半径为 k）可自由地绕过其中心的铅垂固定轴转动。质点在光滑水平桌面上，并与线成直角地抛出，那么线开始缠在轮上。试证：如果线始终不脱离轮子，那么线的直线部分的最短长度为



题 6-4 图

$$\left(l^2-a^2-\frac{Mk^2}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

提示：取轮子转角 θ 及线对轮的包角 φ 为广义坐标，线直线部分长 $r=l-a\varphi$，列写尼尔森方程，求两个第一积分，当且仅当 $\dot{\varphi}=0$ 时 r 最小。

6-5 如果广义力 $Q_s=-\frac{\partial V}{\partial q_s}$，其中$V$仅为广义坐标的函数，试证明：尼尔森方程(6-15)可写成形式

$$\frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{q}_s}-2\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n)$$

其中 $L=T-V$。

6-6 作变换 $Q_s=f_s(q_k)$ $(s,k=1,2,\cdots,n)$ 且 $\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(q_1,q_2,\cdots,q_n)}\neq 0$，于是存在逆变换 $q_s=\Phi(Q_k)$。试证明：在上述变换下题 6-5 中的尼尔森方程是不变的。

第七章　哈密顿正则方程及其积分方法

在这一章里我们研究哈密顿正则方程及其积分方法——泊松定理和雅科比方法，以及正则变换。

第一节　哈密顿正则方程

1.　哈密顿正则方程的推导

拉格朗日方程(4-21)是相对 n 个独立函数 $q_s(s=1, 2, \cdots, n)$的二阶微分方程组。但是这个方程组可变换为等价的、相对 $2n$ 个函数的一阶微分方程组。

在分析动力学中引进所谓"广义动量" p_s 这样一个动力学量，它们与拉格朗日函数的关系为

$$p_s=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{7-1}$$

由动能表达式(4-26)、(4-27)、(4-28)知

$$p_s=\sum_{k=1}^{n} A_{sk}\dot{q}_k+B_s \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{7-2}$$

因此，每个广义动量都是广义速度的线性式。方程(7-2)可相对 $\dot{q}_k$ 解为 p_s 的函数，因此可将 L 用 p_s，q_s 表出。我们导出相对于变量 q_s 及 p_s 的微分方程组。

我们组成一个函数

$$H=-L+\sum_{s=1}^{n} p_s\dot{q}_s \tag{7-3}$$

此函数称为哈密顿(Hamilton)函数。

对于完全稳定的保守系统，哈密顿函数有简单的物理意义。实际上，因为

$$\sum_{s=1}^{n} p_s\dot{q}_s = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s = 2T_2 = 2T$$

而 $L = T + U = T - V$，按照(7-3)有

$$H = 2T - L = T - U = T + V = E$$

因此，完全稳定的保守系统的哈密顿函数表示力学系统的总能量。

为了推导联系 p_s 及 q_s 的方程，我们以两种观点研究函数H的变分：

(1) 按照(7-3)，将H看作 t，q_s，$\dot{q}_s$，p_s 的函数；

(2) 借助于(7-1)从H中消去 $\dot{q}_s$ 之后而为 $H(t, q_s, p_s)$。

首先，根据(7-3)，H的变分为

$$\delta H = -\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta \dot{q}_s + \sum_{s=1}^{n} \dot{q}_s \delta p_s + \sum_{s=1}^{n} p_s \delta \dot{q}_s \tag{7-4}$$

由于(7-1)，上式中第二项与第四项相互抵消。而由拉格朗日方程(4-146)知

$$\frac{\partial L}{\partial q_s} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = \dot{p}_s$$

因此(7-4)成为

$$\delta H = \sum_{s=1}^{n} (-\dot{p}_s \delta q_s + \dot{q}_s \delta p_s) \tag{7-5}$$

其次，再设 $H = H(t, q_s, p_s)$来计算 δH。我们有

$$\delta H = \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_s}\delta q_s + \frac{\partial H}{\partial p_s}\delta p_s\right) \tag{7-6}$$

比较(7-5)与(7-6)，我们得

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_s}+\dot{p}_s\right)\delta q_s+\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s}-\dot{q}_s\right)\delta p_s=0 \tag{7-7}$$

这样，由于系统的完整性所有 δq_s 及 δp_s 都是彼此独立的，并且等式(7-7)在任何的变分 δq_s 及 δp_s 下都满足，那么方程(7-7)中 δq_s 及 δp_s 前面的系数必须为零，即

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\quad \dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}\quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{7-8}$$

方程(7-8)叫做正则变量 q_s，p_s 下的分析动力学方程，或哈密顿正则方程。

2. 研究正则方程的意义

前面导出的系统运动的正则方程(7-8)是 $2n$ 个一阶微分方程组，在解决实际问题时和拉格朗日方程是等价的。但是，首先，正则方程在形式上比拉格朗日方程要简单，结构上又对称，在解决许多复杂的力学问题时（如天体力学、振动问题），更便于作普遍讨论。其次，与正则方程相联系所引进的新概念（如正则变量），在力学和物理中（如统计物理、量子力学等），有很多用途。最后，由正则方程建立了一整套积分方法——泊松定律、雅科比方法等。

3. 例题

利用正则方程求解运动的步骤大致如下：

(1) 根据所研究的力学系统的物理条件和特点，分析其自由度，选取适当的广义坐标；

(2) 写出动能 T 和势能 V 的表达式；

(3) 求广义动量 $p_s=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}$ 并反解出 $\dot{q}_s=f_s(q_k, p_k, t)$ $(k,s=1,2,\cdots,n)$；

(4) 求出哈密顿函数 $H(q_s,p_s,t)=\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s-L$。如果约束是稳定的，可直接写出 $H=T+V$，把其中变量换成 q_s，p_s，t；

(5) 把H代入正则方程，求出$2n$个一阶微分方程。积分之，解出

$$q_s=q_s(t,C_1,C_2,\cdots,C_{2n})$$
$$p_s=p_s(t,C_1,C_2,\cdots,C_{2n})$$
$$(s=1,2,\cdots,n)$$

(6) 分析结果的物理意义。

例题 开卜勒——牛顿（Kepler－Newton）空间问题。

质量为m的质点，受质量为M的中心吸引在万有引力场中运动。我们导出点运动的正则方程，认为引力中心不动。

众所周知，当质点在中心力作用下运动时，它的轨迹是平面曲线。但是，我们在空间中研究运动正是为了确定此平面曲线的位置。

设x,y,z是质点在以引力中心O为原点的固定直角坐标系中的坐标。现在我们过渡到球坐标r，φ，ψ，其中r——点离吸引中心的距离；φ——点从赤道计起的纬度；ψ——点的经度（图 7-1）。

点的动能在球坐标中为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+r^2\dot{\psi}^2\cos^2\varphi) \qquad (7-9)$$

下面求点的势能表达式V。按牛顿引力定律，点受吸引力

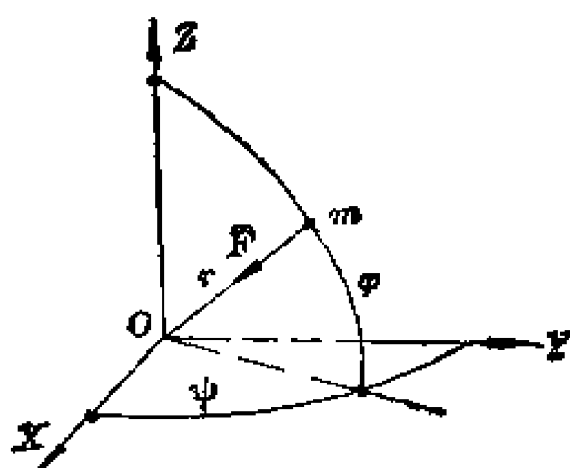


图 7-1

$$\boldsymbol{F}=-\gamma\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{r}_0$$

这里γ是万有引力常数，$\boldsymbol{r}_0$为点的矢径$\boldsymbol{r}$的单位矢量。我们用μ表记$M\gamma$．现在来求$\boldsymbol{F}$的力函数。因为引力的元功仅在径向位移上异于零，故

$$dA_F=F_r dr=-\frac{\mu m}{r^2}dr$$

其中F_r为力在$\boldsymbol{r}_0$方向上的投影．因此，力函数U的微分为

$$dU=-\frac{\mu m}{r^2}dr$$

故
$$U=\frac{\mu m}{r}+C$$

设当$r=\infty$时，$U=0$，我们得$C=0$。于是力函数有形式$U=\frac{\mu m}{r}$，而势能为

$$V=-U=-\frac{\mu m}{r}$$

我们来计算广义动量。设 $r=q_1$，$\varphi=q_2$，$\psi=q_3$，于是

$$p_1=\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}$$

$$p_2=\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}$$

$$p_3=\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}=mr^2\dot{\psi}\cos^2\varphi$$

解出广义速度

$$\dot{r}=\frac{p_1}{m},\quad \dot{\varphi}=\frac{p_2}{mr^2},\quad \dot{\psi}=\frac{p_3}{mr^2\cos^2\varphi} \tag{7-10}$$

这是一个稳定系统，故哈密顿函数等于总能量

$$H=T+V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+r^2\dot{\psi}^2\cos^2\varphi)-\frac{\mu m}{r}$$

利用(7-10)从H中消去 $\dot{r}$、$\dot{\varphi}$、$\dot{\psi}$，则得

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_1^2+\frac{1}{r^2}p_2^2+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}p_3^2\right)-\frac{\mu m}{r} \tag{7-11}$$

于是，质点的正则方程为

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{r}=\frac{\partial H}{\partial p_1},\quad \dot{\varphi}=\frac{\partial H}{\partial p_2},\quad \dot{\psi}=\frac{\partial H}{\partial p_3}\\
&\dot{p}_1=-\frac{\partial H}{\partial r},\quad \dot{p}_2=-\frac{\partial H}{\partial \varphi},\quad \dot{p}_3=-\frac{\partial H}{\partial \psi}
\end{aligned}\right\} \tag{7-12}$$

在完成(7-12)中各方程右边的偏导数运算之后，得

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{r}=\frac{1}{m}p_1,\quad \dot{p}_1=\frac{1}{mr^3}p_2^2+\frac{1}{mr^3\cos^2\varphi}p_3^2-\frac{\mu m}{r^2}\\
&\dot{\varphi}=\frac{1}{mr^2}p_2,\quad \dot{p}_2=-\frac{\sin\varphi}{mr^2\cos^3\varphi}p_3^2\\
&\dot{\psi}=\frac{1}{mr^2\cos^2\varphi}p_3,\quad \dot{p}_3=0
\end{aligned}\right\} \tag{7-13}$$

哈密顿方程(7-13)可以利用下面第三节中讲到的哈密顿——雅科比方法来解。

第二节 泊松定理及其在积分哈密顿变量下的动力学方程的应用

1. 对第一积分的泊松条件

假设哈密顿正则方程

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\quad \dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}\quad (s=1,2,\cdots,n)\tag{7-14}$$

有形如

$$f(q_s,p_s,t)=C\tag{7-15}$$

的第一积分。我们来求 $f(q_s,p_s,t)$ 应该满足的条件。为此，我们求(7-15)对时间 t 的全导数，即

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial f}{\partial p_s}\dot{p}_s\right)=0$$

或按(7-14)有

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_s}-\frac{\partial f}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial q_s}\right)=0\tag{7-16}$$

关系(7-16)称为对第一积分的泊松(Poisson)条件。显然，它是必要充分条件。

2. 泊松括号及其性质

我们把两个给定函数 φ 及 ψ 的下述表达式

$$(\varphi,\psi)=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_s}\frac{\partial \psi}{\partial p_s}-\frac{\partial \varphi}{\partial p_s}\frac{\partial \psi}{\partial q_s}\right)\tag{7-17}$$

称为泊松括号。

因此，对第一积分的泊松条件(7-16)取

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(f,H)=0 \tag{7-18}$$

泊松括号有如下性质：

(1) $(\varphi,\varphi)=0$；

(2) $(\psi,\varphi)=-(\varphi,\psi)$；

(3) $(\varphi,-\psi)=-(\varphi,\psi)$，$(-\varphi,\psi)=-(\varphi,\psi)$；

(4) $(\varphi_1+\varphi_2,\psi)=(\varphi_1,\psi)+(\varphi_2,\psi)$；

(5) $(\varphi_1\varphi_2,\psi)=\varphi_1(\varphi_2,\psi)+\varphi_2(\varphi_1,\psi)$；

(6) $\frac{\partial}{\partial t}(\varphi,\psi)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t},\ \psi\right)+\left(\varphi,\ \frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$。

这些性质都可由(φ,ψ)的定义直接推证。

3. 复合泊松括号

如果泊松括号中的一项本身是两个函数的泊松括号，则称为复合泊松括号，记作

$$(f,(\varphi,\psi))=\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial q_s}\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial p_s}-\frac{\partial f}{\partial p_s}\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial q_s}\right] \tag{7-19}$$

4. 关于相互内旋的函数的概念

如果函数 $f_1(t,q,p)$ 与 $f_2(t,q,p)$ 所构成的泊松括号恒等于零，即

$$(f_1,f_2)\equiv 0 \tag{7-20}$$

则称 f_1，f_2 为相互内旋的。

5. 三个复合泊松括号

其中每一个复合括号内三个函数 f，φ，ψ 用循环交换函

数的方法所得到，它们的和恒等于零：

$$(f,(\varphi,\psi))+(\varphi,(\psi,f))+(\psi,(f,\varphi))\equiv 0 \qquad (7\text{-}21)$$

这一等式称为雅可比(Jacobi)恒等式。

可以利用数学归纳法证明雅可比恒等式。先对带一个自由度的系统，即有两个正则变量 q_1、p_1 的情形来检验(7-21)；然后对两个自由度的系统，即有四个正则变量 q_1、q_2、p_1、p_2 的情形来检验(7-21)等等。

我们对一个自由度的情形检验(7-21)。因

$$(f,(\varphi,\psi))=\frac{\partial f}{\partial q}\cdot\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial q}$$

但

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial p}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial q\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial p}+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^2\psi}{\partial p^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}\frac{\partial\psi}{\partial q}-\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial q}$$

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial q}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}\frac{\partial\psi}{\partial p}+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial q}-\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}$$

因此

$$(f,(\varphi,\psi))=\frac{\partial f}{\partial q}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial q\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial p}+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^2\psi}{\partial p^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}\frac{\partial\psi}{\partial q}-\frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial q}\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right]-\frac{\partial f}{\partial p}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}\frac{\partial\psi}{\partial p}+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial q}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial q}-\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}\right]$$

类似地计算得

$$(\varphi,(\psi,f))=\frac{\partial\varphi}{\partial q}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial q\partial p}\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{\partial\psi}{\partial q}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial p^2}\frac{\partial f}{\partial q}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial p}\right]-\frac{\partial\varphi}{\partial p}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{\partial\psi}{\partial q}\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial q}\frac{\partial f}{\partial q}-\frac{\partial\psi}{\partial p}\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\right]$$

$$(\psi,(f,\varphi))=\frac{\partial\psi}{\partial q}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial q\partial p}\frac{\partial\varphi}{\partial p}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q}\frac{\partial f}{\partial p}\right]-\frac{\partial\psi}{\partial p}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\frac{\partial\varphi}{\partial p}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q}\frac{\partial\varphi}{\partial q}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}\right]$$

不难验证，当三个复合括号相加时，所有项互相抵消。于是，对一个自由度情形的雅科比等式得证。

从上面计算中看出，对一般情形，复合括号中的每一项都包含一个函数的二阶偏导数。但是，在研究每两个复合泊松括号时，它们能包含同一个函数的二阶偏导数，例如，前两个复合括号中同时包括有ψ的二阶偏导数，而其系数相同、符号相反，因而相加时抵消。类似地，在第二、第三个复合括号中同时包括f的二阶偏导数，且其系数相同符号相反，因而相加时抵消。第三、第一个复合括号中φ的二阶偏导数有大小相同但符号相反的系数，相加则抵消。于是三个复合括号相加时全部抵消而为零。这就证明了雅科比恒等式。

6、 关于正则方程三个积分的泊松定理

定理： 如果已知哈密顿正则方程的不处于相互内旋的两个第一积分

$$f_1(t,q,p)=C_1,\quad f_2(t,q,p)=C_2$$

那么这些积分的泊松括号也是哈密顿方程的积分。

这个定理是分析力学中占重要地位的一个定理，称为泊松定理。

为证明这个定理，我们先应用对每个所给积分的泊松条件，即

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}+(f_1,H)=0,\qquad \frac{\partial f_2}{\partial t}+(f_2,H)=0 \tag{7-22}$$

然后研究三个函数 H,f_1,f_2 的雅科比恒等式

$$(H,(f_1,f_2))+(f_1,(f_2,H))+(f_2,(H,f_1))=0 \tag{7-23}$$

但由(7-22)知

$$(f_2,H)=-\frac{\partial f_2}{\partial t} \tag{7-24}$$

$$(H,f_1)=\frac{\partial f_1}{\partial t} \tag{7-25}$$

将(7-24)、(7-25)代入(7-23)，得

$$(H,(f_1,f_2))+\left(f_1,\ -\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)+\left(f_2,\ \frac{\partial f_1}{\partial t}\right)=0 \tag{7-26}$$

将上式中第一、第三个括号交换项并改变括号前的符号，然后各括号乘以(−1)，便得

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t},\ f_2\right)+\left(f_1,\ \frac{\partial f_2}{\partial t}\right)+((f_1,f_2),H)=0$$

此式前两个括号为$\frac{\partial}{\partial t}(f_1,\ f_2)$，因此可写成

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_1,f_2)+((f_1,f_2),H)=0$$

如果函数 f_1、f_2 不是相互内旋的，即 $(f_1,f_2)\neq 0$，那么 (f_1, f_2) 是某第三个函数

$$(f_1, f_2)=f_3(t, q, p)$$

因此，它满足第一积分的泊松条件

$$\frac{\partial f_3}{\partial t}+(f_3, H)=0 \tag{7-27}$$

这表明 $f_3=C_3$ 也是正则方程的第一积分。定理得证。

看来，泊松定理是积分哈密顿正则方程的重要手段。因为知道两个积分便可由此得到第三个积分，再继续配合而得到第四个、第五个积分，等等。但是，可惜它直到现在还不能应用于解力学的著名经典问题——带有一固定点的刚体运动问题，天体力学中的三体问题，及其它问题。在这些问题中，正如在力学中的大多数另外的经典问题中一样，所有已知积分都是相互内旋的，而不能利用来获得新的积分。

我们以开卜勒——牛顿空间问题的已知积分来检验泊松定理。因为在此情形中力通过固定点 O，故关于点 O 的动量矩守恒，即有三个第一积分

$$m(y\dot{z}-z\dot{y})=C_1$$

$$m(z\dot{x}-x\dot{z})=C_2$$

$$m(x\dot{y}-y\dot{x})=C_3$$

将第一积分表为哈密顿变量，令

$$q_1=x,\ \ q_2=y,\ \ q_3=z$$

因动能为 $T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$，故

$$p_1=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}$$

$$p_2=\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}=m\dot{y}$$

$$p_3=\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}=m\dot{z}$$

因此

$$f_1=C_1=m(y\dot{z}-z\dot{y})=q_2p_3-p_2q_3$$
$$f_2=C_2=m(z\dot{x}-x\dot{z})=q_3p_1-p_3q_1$$
$$f_3=C_3=m(x\dot{y}-y\dot{x})=q_1p_2-p_1q_2$$

我们对前两个第一积分应用泊松定理：

$$(f_1,f_2)=\sum_{s=1}^{3}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_s}\frac{\partial f_2}{\partial p_s}-\frac{\partial f_1}{\partial p_s}\frac{\partial f_2}{\partial q_s}\right)$$
$$=\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_1}\frac{\partial f_2}{\partial p_1}-\frac{\partial f_1}{\partial p_1}\frac{\partial f_2}{\partial q_1}\right)+\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_2}\frac{\partial f_2}{\partial p_2}-\frac{\partial f_1}{\partial p_2}\frac{\partial f_2}{\partial q_2}\right)+\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_3}\frac{\partial f_2}{\partial p_3}-\frac{\partial f_1}{\partial p_3}\frac{\partial f_2}{\partial q_3}\right)$$
$$=q_1p_2-q_2p_1$$

因此 $(f_1,f_2)=f_3$，即 $f_3=C_3$ 也是第一积分。

我们现在研究具有广义能量积分的力学系统，即研究哈密顿函数H不明显依赖于时间的情形：

$$\frac{\partial H}{\partial t}=0 \tag{7-28}$$

设已知第一积分 $f(t,q,p)=C_0$ 明显地依赖于时间 t。它满足泊松条件

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(f,H)=0 \tag{7-29}$$

将此等式对时间求导数，我们得到

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\left(f,\frac{\partial H}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial t},\ H\right)=0 \tag{7-30}$$

据(7-28)，知(7-30)中第二项为零，而因此

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\left(\frac{\partial f}{\partial t},\ H\right)=0 \tag{7-31}$$

(7-31)表明，函数$\frac{\partial f}{\partial t}=C_1$满足对第一积分的泊松条件，即它也是运动方程的第一积分。进而，得到下述第一积分

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=C_2,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}=C_3,\ \cdots$$

第三节　积分哈密顿动力学方程的雅科比方法（哈密顿——雅科比定理）

这个方法考虑：为了找到哈密顿正则方程的全部第一积分，只要积分确定结构的一阶偏微分方程就足够了，亦即找出这个方程的全积分。此时哈密顿方程的全部积分可对其表达式中的独立变量 q_s 及常数求导数的方法而得到。

1.　预备知识

我们研究依赖于力学系统广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 及时间 t 的某个函数 S，在它的表达式中包含 $n+1$ 个任意常数 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$，常数的数目等于计入时间的所有变量的数目：

$$S=S(q_1,q_2,\cdots,\ q_n,t;a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1}) \tag{7-32}$$

我们写出函数 S 对变量 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 及 t 的偏导数，记作

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t}&=P_0(q_1,\cdots,q_n,t;a_1,\cdots,a_{n+1})\\ \frac{\partial S}{\partial q_1}&=P_1(q_1,\cdots,q_n,t;a_1,\cdots,a_{n+1})\\ \frac{\partial S}{\partial q_2}&=P_2(q_1,\cdots,q_n,t;a_1,\cdots,a_{n+1})\\ &\vdots\\ \frac{\partial S}{\partial q_n}&=P_n(q_1,\cdots,q_n,t;a_1,\cdots,a_{n+1})\end{aligned}\right\} \tag{7-33}$$

(7-33) 与 (7-32)联结，我们有由 $n+2$ 个等式组成的系统。由这系统可消去全部 $n+1$ 个任意常数 $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$，结果有两种可能性：或者出现 S，$\frac{\partial S}{\partial t}$，$\frac{\partial S}{\partial q_s}$，$q_s,t$ 之间的一个关系

$$f\left(t;q_1,\cdots,q_n;S;\frac{\partial S}{\partial t};\frac{\partial S}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial S}{\partial q_n}\right)=0 \tag{7-34}$$

或者出现几个关系。在第一种情形中消去任意常数的结果，即关系(7-33)称为相对于函数 S 的一阶偏微分方程，S 为 t，$q_1,\cdots,q_n$ 的函数；而用等式（7-32）表示的函数 S 称为一阶偏微分方程(7-34)的全积分。

在第二种情形，由于消去全部任意常数而出现了函数 S 及其偏导数之间的几个关系，可以认为，不存在这样一个微分方程使已给函数 S 成为全积分。

作为例子，我们研究下面的偏微分方程

$$\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial q_3}\right)^2=0 \tag{7-35}$$

它的全积分为

$$S=\alpha_1 q_1+\alpha_2 q_2+\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\cdot q_3+\alpha_3 \tag{7-36}$$

这不难验证。实际上

$$\frac{\partial S}{\partial q_1}=\alpha_1, \quad \frac{\partial S}{\partial q_2}=\alpha_2, \quad \frac{\partial S}{\partial q_3}=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2} \tag{7-37}$$

将(7-37)代入(7-35)，我们得到恒等式。

由此不难想象，一般的偏微分方程

$$f\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \cdots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right)=0$$

这里 f 是依赖于 $\frac{\partial S}{\partial q_s}$ 的某个任意函数，有全积分

$$S=\alpha_1 q_1+\alpha_2 q_2+\cdots+\alpha_{n-1} q_{n-1}+C q_n+\alpha_{n+1}$$

其中 C 由关系

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, C)=0$$

来确定。

再举一例。

偏微分方程

$$q_1 \frac{\partial S}{\partial q_1}+q_2 \frac{\partial S}{\partial q_2}+\cdots+q_n \frac{\partial S}{\partial q_n} + f\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right)-S=0 \tag{7-38}$$

称为克莱洛(Clairaut)方程，它的全积分有形式

$$S=\alpha_1 q_1+\alpha_2 q_2+\cdots+\alpha_n q_n+f(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \tag{7-39}$$

这里 f 如在(7-38)中的函数。

比较两个例子中的全积分可以发现：在第一种情形中出现于全积分表达式(7-36)中的一个任意常数以相加的形式出现，即不是 q_s 的某个函数的系数。在第二种情形中全积分(7-39)中没有任何一个相加常数，每一个常数都是一个 q_s 前

的因子。这是因为在第一个例子中偏微分方程中没有未知函数，而在克莱洛方程中有函数 S。这对一般情形也是对的，即如果一阶偏微分方程有形式

$$F\left(q_1, q_2, \cdots, q_n;\ t;\ \frac{\partial S}{\partial t};\ \frac{\partial S}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right)=0 \tag{7-40}$$

此方程不明显依赖于函数 S，那么它的全积分中的一个常数是相加的，即

$$S=S(t;q_1,\cdots,q_n;a_1,\cdots,a_n)+a_{n+1} \tag{7-41}$$

我们现在详细地研究在这种情形中一阶偏微分方程(7-40)取怎样的形式。显然，从(7-33)不可能找到所有常数 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$，但可以由(7-33)的后 n 个方程中找到 n 个常数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$。由(7-33)的第一个方程的右边消去这些常数，我们得到一阶偏微分方程形如

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\varphi\left(q_1, \cdots, q_n; t;\ \frac{\partial S}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right)=0 \tag{7-42}$$

由(7-41)确定的函数 S 是这一方程的全积分。这样类型的方程在分析动力学中有重要价值。

2. 哈密顿——雅科比定理

设函数 $H(t, q, p)$ 为力学系统的哈密顿函数。我们现在研究函数 $S(q_s, t, a_s)+a_{n+1}$，它满足偏微分方程

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(t, q_1, \cdots, q_n;\ \frac{\partial S}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right)=0 \tag{7-43}$$

即在哈密顿函数中所有广义动量 p_s 用 S 对 q_s 的偏导数来代替而写出方程(7-43)。方程(7-43)称为哈密顿——雅科比方程。

哈密顿——雅科比定理表述如下：

如果已知方程(7-43)的全积分为确定函数 $\tilde{S}(q,\alpha,t)$ 的形式，那么正则方程

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\quad \dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}\quad (s=1,2,\cdots,n)\qquad (7-44)$$

的全部 $2n$ 个第一积分有下列形式

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha_s}=\beta_s\quad (s=1,2,\cdots,n)\qquad (7-45)$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_s}=p_s\quad (s=1,2,\cdots,n)\qquad (7-46)$$

其中 β_s 为新的任意常数。

证明：首先，我们证明关系(7-45)是第一积分，即证明它对时间 t 的全导数由于(7-44)而恒等于零。现在将(7-45)对时间求全导数，注意到 q_k 依赖于 t，得

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \alpha_s \partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \alpha_s \partial q_k}\dot{q}_k=0\qquad (7-47)$$

其中 $\dot{q}_k$ 用(7-44)替代而 p_k 要用(7-46)替代。因此有

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \alpha_s \partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \alpha_k \partial q_k}\cdot\frac{\partial H\left(t,q,\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q}\right)}{\partial\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_k}\right)}=0\qquad (7-48)$$

必须证明(7-48)是恒等式。为此，在方程(7-43)中用找到的全积分 $\tilde{S}$ 替代 S。根据全积分的意义，代入结果出现恒等式

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}+H\left(t,q,\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q}\right)=0\qquad (7-49)$$

因为恒等式对出现于其中的任何自变量的导数仍为恒等式。

将(7-49)对 α_s 求导数，注意到 α_s 出现于 $\tilde{S}$，$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}$ 及 $\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_k}$ $(k=1,2,\cdots,n)$之中，有

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial t \partial \alpha_s}+\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H\left(t, q, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q}\right)}{\partial\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_k}\right)} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q_k \partial \alpha_s}=0 \qquad (7-50)$$

显然(7-48)与(7-50)相重合，即证明了(7-48)为恒等式。

其次，我们类似地可证明(7-46)也是第一积分。为此，将(7-46)对 t 求全导数，并注意到 t 及 q_k 出现于(7-46)的左边，我们有

$$\dot{p}_s=\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q_s \partial t}+\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q_s \partial q_k} \dot{q}_k \qquad (7-51)$$

其中 $\dot{q}_k$ 可表为

$$\dot{q}_k=\frac{\partial H\left(t, q, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q}\right)}{\partial\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_k}\right)}$$

因此等式(7-51)取形式

$$-\dot{p}_s+\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q_s \partial t}+\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q_s \partial q_k} \frac{\partial H\left(t, q, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q}\right)}{\partial\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_k}\right)}=0 \qquad (7-52)$$

为证明(7-52)为恒等式，我们求恒等式(7-49)对 q_s 的导数，得出下面的恒等式

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t\partial q_s}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H\left(t,q,\frac{\partial S}{\partial q}\right)}{\partial\left(\frac{\partial S}{\partial q_k}\right)}\cdot\frac{\partial^2 H}{\partial q_k\partial q_s}+\frac{\partial H}{\partial q_s}=0$$

(7-53)

但$\frac{\partial H}{\partial q_s}=-\dot{p}_s$，因此(7-52)与(7-53)重合，即(7-52)也是恒等式。于是定理得证。

利用哈密顿——雅科比定理解力学系统问题时，解题步骤如下：根据哈密顿函数写出哈密顿——雅科比方程(7-43)；求此偏微分方程的全积分 S； 作出(7-45)、(7-46)，这是 $2n$ 个代数方程，解此方程得

$$q_s=q_s(t,\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_n)$$
$$p_s=p_s(t,\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_n)$$
$$(s=1,2,\cdots,n)$$

例题

应用哈密顿——雅科比定理积分开卜勒——牛顿空间问题。

解：如在第一节中指出的，令 $q_1=r$，$q_2=\varphi$，$q_3=\psi$，系统的哈密顿函数为(7-11)，即

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_1^2+\frac{1}{r^2}p_2^2+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}p_3^2\right)-\frac{\mu m}{r} \qquad (7\text{-}54)$$

于是哈密顿——雅科比方程(7-43)取形式

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial S}{\partial\psi}\right)^2\right]$$
$$-\frac{\mu m}{r}=0 \qquad (7\text{-}55)$$

方程(7-55)不明显依赖于时间 t，哈密顿——雅科比方程的全积分可写成

$$S=-ht+W(q_1,\cdots,q_n,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},h) \tag{7-56}$$

其中 h 为常数，W不依赖于时间 t。此时

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-h, \quad \frac{\partial S}{\partial q_s}=\frac{\partial W}{\partial q_s}$$

而因此(7-55)取形式

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \psi}\right)^2\right]$$

$$-\frac{\mu m}{r}=h \tag{7-57}$$

我们用分离变量法来求这方程的全积分，即求形如

$$W=R+\phi+\Omega \tag{7-58}$$

的全积分，其中 R 为 r 的函数，ϕ 为 φ 的函数，而 Ω 为 ψ 的函数。为了求得这些函数，将(7-58)代入(7-57)中，得

$$\frac{1}{2m}\left[R'^2+\frac{1}{r^2}\phi'^2+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\Omega'^2\right]=\frac{\mu m}{r}+h$$

我们将此方程中仅依赖于 r 的项分开，即写成

$$\phi'^2+\frac{1}{\cos^2\varphi}\Omega'^2=2mr^2\left(\frac{\mu m}{r}+h\right)-r^2R'^2 \tag{7-59}$$

等式(7-59)的左边不依赖于 r，而右边仅依赖于 r。为使(7-59)满足，它的两边应等于同一常值，将此值记作 k^2。因此有

$$R'^2=2m\left(\frac{\mu m}{r}+h\right)-\frac{k^2}{r^2} \tag{7-60}$$

$$\Omega'^2=(k^2-\phi'^2)\cos^2\varphi \tag{7-61}$$

积分(7-60)得函数 R 为

$$R=\int\sqrt{2m\left(\frac{\mu m}{r}+h\right)-\frac{k^2}{r^2}}dr+C_1 \tag{7-62}$$

进而，对方程(7-61)用类似的讨论。当且仅当依赖于不同自变量的左边和右边等于同一常值时，它才能满足，将此常值记作 l^2，即

$$\Omega'^2=l^2,\quad \phi'^2=k^2-\frac{l^2}{\cos^2\varphi} \tag{7-63}$$

由此积分得

$$\Omega=l\psi+C_2,\ \phi=\int\sqrt{k^2-\frac{l^2}{\cos^2\varphi}}d\varphi+C_3 \tag{7-64}$$

(7-62)与(7-64)中的附加常数 C_1, C_2, C_3，可以去掉，因为方程(7-57)中函数W仅以导数形式出现。于是函数W为

$$W=\int\sqrt{2m\left(\frac{\mu m}{r}+h\right)-\frac{k^2}{r^2}}dr+\int\sqrt{k^2-\frac{l^2}{\cos^2\varphi}}d\varphi+l\psi \tag{7-65}$$

将(7-65)代入(7-56)，我们求得全积分

$$S=-ht+\int\sqrt{2m\left(\frac{\mu m}{r}+h\right)-\frac{k^2}{r^2}}dr+\int\sqrt{k^2-\frac{l^2}{\cos^2\varphi}}d\varphi+l\psi \tag{7-66}$$

现在我们利用哈密顿——雅科比定理写出第一系列积分。令S对常数h, k, l的偏导数等于另一些常数 t_0, b, ψ_0，即

$$\frac{\partial S}{\partial h}=t_0,\quad \frac{\partial S}{\partial k}=b,\quad \frac{\partial S}{\partial l}=\psi_0$$

或者

$$\int \frac{m\,dr}{\sqrt{2m\left(\frac{\mu m}{r}+h\right)-\frac{k^2}{r^2}}}=t+t_0 \tag{7-67}$$

$$\int \frac{k\,d\varphi}{\sqrt{k^2-\frac{l^2}{\cos^2\varphi}}}-\int \frac{k\,dr}{r^2\sqrt{2m\left(\frac{\mu m}{r}+h\right)-\frac{k^2}{r^2}}}=b \tag{7-68}$$

$$\psi-\int \frac{l\,d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{k^2-\frac{l^2}{\cos^2\varphi}}}=\psi_0 \tag{7-69}$$

由(7-67)、(7-68)及(7-69)给出坐标 r，φ，ψ 为时间 t 的函数，于是得到质点的运动。

再利用哈密顿——雅科比定理写出第二系列积分

$$p_1=\frac{\partial S}{\partial r},\qquad p_2=\frac{\partial S}{\partial \varphi},\qquad p_3=\frac{\partial S}{\partial \psi}$$

按照这个解研究轨道可在天体力学的书中见到。

第四节　正则变换

1. 变量的正则变换

我们研究由变量 q_k，p_k 向新变量 Q_s，P_s 的变换

$$\left.\begin{aligned} Q_s&=Q_s(q_k,p_k,t)\\ P_s&=P_s(q_k,p_k,t)\end{aligned}\quad (s,k=1,2,\cdots,n)\right\} \tag{7-70}$$

并且函数行列式

$$\Delta=\frac{\partial(Q_s,P_s)}{\partial(q_s,p_s)}$$

异于零。于是，变换(7-70)是可逆的，旧变量 q_s，p_s 可利用新变量 Q_k，P_k 表出

$$\left.\begin{aligned} q_s &= q_s(Q_k, P_k, t) \\ p_s &= p_s(Q_k, P_k, t) \end{aligned} \quad (s, k=1,2,\cdots,n) \right\} \quad (7\text{-}71)$$

在变换(7-70)下，哈密顿正则方程

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s} \quad (s=1,2,\cdots,n) \quad (7\text{-}72)$$

将过渡到一组新的方程，但一般说来，这组新方程没有正则方程的形式。

为积分力学方程，有特别重要意义的是这样一类变换：在此类变换下，哈密顿正则方程的形式保持不变。这时，在变换(7-70)下，方程(7-72)变换为正则方程组

$$\dot{Q}_s=\frac{\partial H^*}{\partial P_s}, \quad \dot{P}_s=-\frac{\partial H^*}{\partial Q_s} \quad (s=1,2,\cdots,n)$$

(7-73)

其中 $H^*=H^*(Q_s,P_s,t)$ 有哈密顿函数的作用。

如果通过变量变换，正则方程的形式不变，那么这种变换就叫正则变换。通过正则变换，可使方程(7-73)比方程(7-72)更容易积分。

2. 正则变换、母函数

我们来解释，在怎样的条件下变换(7-70)是正则的。所有正则变换可借助一个微分条件确定。如果微分形式

$$\sum_{s=1}^{n} p_s dq_s - \sum_{s=1}^{n} P_s dQ_s + (H^*-H)dt = dU \quad (7\text{-}74)$$

恒满足，则可逆变换(7-70)是正则的。在(7-74)中 dU 为一恰当微分，U 可为 q_s,p_s,Q_s,P_s 和 t 的函数，H^* 为新变量

Q_s, P_s 表示的哈密顿函数。

现在由(7-74)导出正则方程(7-73)。设 q_s, p_s 有任意变更 $\delta q_s, \delta p_s (s=1,2,\cdots,n)$，则由(7-74)得到

$$\sum_{s=1}^{n} p_s \delta q_s - \sum_{s=1}^{n} P_s \delta Q_s = \delta U \tag{7-75}$$

这是因为 $\delta t=0$。(7-74)还可写成

$$\sum_{s=1}^{n} p_s \dot{q}_s - \sum_{s=1}^{n} P_s \dot{Q}_s + H^* - H = \dot{U} \tag{7-76}$$

将(7-75)对 t 求导数，得

$$\sum_{s=1}^{n} \dot{p}_s \delta q_s + \sum_{s=1}^{n} p_s \frac{d}{dt}\delta q_s - \sum_{s=1}^{n} \dot{P}_s \delta Q_s - \sum_{s=1}^{n} P_s \frac{d}{dt}\delta Q_s = \frac{d}{dt}\delta U \tag{7-77}$$

对(7-76)取变分得

$$\sum_{s=1}^{n} p_s \delta \dot{q}_s + \sum_{s=1}^{n} \dot{q}_s \delta p_s - \sum_{s=1}^{n} P_s \delta \dot{Q}_s - \sum_{s=1}^{n} \dot{Q}_s \delta P_s + \delta H^* - \delta H = \delta \dot{U} \tag{7-78}$$

因为运算 δ 与$\frac{d}{dt}$是可以交换的（参看第八章第一节），我们有

$$\frac{d}{dt}\delta q_s = \delta \dot{q}_s, \qquad \frac{d}{dt}\delta Q_s = \delta \dot{Q}_s, \qquad \frac{d}{dt}\delta U = \delta \dot{U} \tag{7-79}$$

将(7-77)与(7-78)相减，并利用(7-79)，得到

$$\sum_{s=1}^{n} (\dot{q}_s \delta p_s - \dot{p}_s \delta q_s) - \sum_{s=1}^{n} (\dot{Q}_s \delta P_s - \dot{p}_s \delta Q_s) + \delta H^* - \delta H = 0 \tag{7-80}$$

由正则方程(7-72)，知

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{n}(\dot{q}_s\delta p_s-\dot{p}_s\delta q_s)-\delta H \\
=&\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\delta p_s+\frac{\partial H}{\partial q_s}\delta q_s\right)-\delta H \\
=&\delta H-\delta H=0
\end{aligned}
\tag{7-81}
$$

将(7-81)代入(7-80)，我们有

$$
\sum_{s=1}^{n}\dot{Q}_s\delta P_s-\sum_{s=1}^{n}\dot{P}_s\delta Q_s=\delta H^* \tag{7-82}
$$

注意到

$$
\delta H^*=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial H^*}{\partial Q_s}\delta Q_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial H^*}{\partial P_s}\delta P_s
$$

于是

$$
\dot{Q}_s=\frac{\partial H^*}{\partial P_s},\qquad \dot{P}_s=-\frac{\partial H^*}{\partial Q_s} \tag{7-83}
$$

这就证明，当条件(7-74)满足时，变换(7-70)是正则的。

为解正则变换问题必须在一般形式下对函数 U 和 H^* 解方程(7-74)，因而，问题是不确定的。我们可认为其中一个函数是任意的，将函数 U 取为这样的函数比较方便。这个函数 U 称为母函数，因而借助它可找到未知的变换。

3. 正则变换的基本类型

如取 U 作为 q_s、p_s、Q_s、P_s 和 t 的函数，则

$$
\begin{aligned}
dU=&\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial q_s}dq_s+\frac{\partial U}{\partial p_s}dp_s\right. \\
&\left.+\frac{\partial U}{\partial Q_s}dQ_s+\frac{\partial U}{\partial P_s}dP_s\right)+\frac{\partial U}{\partial t}dt
\end{aligned}
$$

于是，(7-74)可写成

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{\left(p_s-\frac{\partial U}{\partial q_s}\right)dq_s-\left(P_s+\frac{\partial U}{\partial Q_s}\right)dQ_s-\frac{\partial U}{\partial p_s}dp_s\right.$$

$$\left.-\frac{\partial U}{\partial P_s}dP_s\right\}+\left(H^*-H-\frac{\partial U}{\partial t}\right)dt=0 \tag{7-84}$$

下面研究四种基本类型的正则变换。

第一类母函数记作 U_1，有形式

$$U_1=U_1(q_s,Q_s,t) \tag{7-85}$$

将(7-85)代入(7-84)，得到

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{\left(p_s-\frac{\partial U_1}{\partial q_s}\right)dq_s-\left(P_s+\frac{\partial U_1}{\partial Q_s}\right)dQ_s\right\}$$

$$+\left[H^*-\left(H+\frac{\partial U_1}{\partial t}\right)\right]dt=0 \tag{7-86}$$

由 dq_s,dQ_s，的系数为零，我们有

$$p_s=\frac{\partial U_1}{\partial q_s},\qquad P_s=-\frac{\partial U_1}{\partial Q_s} \tag{7-87}$$

由dt的系数为零，我们求得新的哈密顿函数

$$H^*=H+\frac{\partial U_1}{\partial t} \tag{7-88}$$

现在说明(7-87)给出变换(7-70)。由(7-87)第一群求得

$$p_s=p_s(q_k,Q_k,t) \tag{7-89}$$

由(7-87)第二群求得

$$P_s=P_s(q_k,Q_k,t)$$

因此

$$q_s=q_s(Q_k,P_k,t) \tag{7-90}$$

将(7-90)代入(7-89)，得到

$$p_s=p_s(Q_k,P_k,t) \tag{7-91}$$

再由(7-90)和(7-91)解得

$$\left.\begin{aligned}Q_s &= Q_s(q_k, p_k, t)\\ P_s &= P_s(q_k, p_k, t)\end{aligned}\right\} \tag{7-92}$$

于是，已知母函数(7-85)，可求得正则变换(7-92)以及新的哈密顿函数(7-88)。

第二类取母函数 U_2 有形式

$$U_2 = F_2(q_s, P_s, t) - \sum_{s=1}^{n} Q_s P_s \tag{7-93}$$

于是

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial U_2}{\partial q_s} = \frac{\partial F_2}{\partial q_s}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial p_s} = 0, \quad \frac{\partial U_2}{\partial Q_s} = -P_s,\\ &\frac{\partial U_2}{\partial P_s} = \frac{\partial F_2}{\partial P_s} - Q_s\end{aligned}\right\} \tag{7-94}$$

将(7-94)代入(7-84)，得到

$$\sum_{s=1}^{n} \left\{\left(p_s - \frac{\partial F_2}{\partial q_s}\right) dq_s + \left(Q_s - \frac{\partial F_2}{\partial P_s}\right) dP_s\right\} + \left(H^* - H - \frac{\partial F_2}{\partial t}\right) dt = 0$$

因此有

$$p_s = \frac{\partial F_2}{\partial q_s}, \quad Q_s = \frac{\partial F_2}{\partial P_s}, \quad H^* = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \tag{7-95}$$

其中前两式给出

$$p_s = p_s(q_k, P_k, t) \tag{7-96}$$

$$Q_s = Q_s(q_k, P_k, t) \tag{7-97}$$

由(7-97)解得

$$q_s = q_s(Q_k, P_k, t) \tag{7-98}$$

将其代入(7-96)，得

$$p_s = p_s(Q_k, P_k, t) \tag{7-99}$$

因此存在变换(7-98)、(7-99)，而(7-95)中第三式给出新的哈密顿函数。

第三类取

$$U_3 = F_3(p_s, Q_s, t) + \sum_{s=1}^{n} p_s q_s \tag{7-100}$$

用类似的方法，得到

$$P_s = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_s}, \quad q_s = -\frac{\partial F_3}{\partial p_s}, \quad H^* = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \tag{7-101}$$

第四类取

$$U_4 = F_4(p_s, P_s, t) + \sum_{s=1}^{n} p_s q_s - \sum_{s=1}^{n} P_s Q_s \tag{7-102}$$

用类似的方法，得到

$$q_s = -\frac{\partial F_4}{\partial p_s}, \quad Q_s = \frac{\partial F_4}{\partial P_s}, \quad H^* = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \tag{7-103}$$

我们注意到，如在上述母函数 U_1 以及函数 F_2，F_3，F_4 中不出现时间 t，那么显然有 $H^* = H$，这时条件(7-74)可写成

$$\sum_{s=1}^{n} p_s dq_s - \sum_{s=1}^{n} P_s dQ_s = dU \tag{7-104}$$

4. 例题

例1. 寻求常数 α，β 使变换

$$Q = q^\alpha \cos(\beta p), \quad P = q^\alpha \sin(\beta p) \tag{7-105}$$

是正则的。

解： 此变换不明显含 t，我们有

$$pdq - PdQ = pdq - q^{\alpha}\sin(\beta p)[\alpha q^{\alpha-1}\cos(\beta p)dq - q^{\alpha}\beta\sin(\beta p)dp]$$

$$= \left[p - \frac{1}{2}\alpha q^{2\alpha-1}\sin(2\beta p)\right]dq + \beta q^{2\alpha}\sin^2(\beta p)dp$$

如果满足条件

$$\frac{\partial}{\partial p}\left[p - \frac{1}{2}\alpha q^{2\alpha-1}\sin(2\beta p)\right] = \frac{\partial}{\partial q}\left[\beta q^{2\alpha}\sin^2(\beta p)\right]$$

则 $pdq-PdQ$ 成为某函数的全微分。上述条件归为

$$\alpha\beta q^{2\alpha-1} = 1$$

由于 q 的任意性，得到 $2\alpha-1=0$，$\alpha\beta=1$，即

$$\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \beta = 2 \tag{7-106}$$

所研究的正则变换为

$$Q = \sqrt{q}\cos 2p, \quad P = \sqrt{q}\sin 2p \tag{7-107}$$

这种变换被庞加莱(Poincaré)应用于天体力学中。

例2、 证明变换

$$Q = \ln\left(\frac{1}{q}\sin p\right), \qquad P = q\,\mathrm{ctg}\ p \tag{7-108}$$

是正则的，并求出与该变换相关的四种类型的母函数。

解：因为

$$Q = -\ln q + \ln\sin p$$

那么
$$dQ = -\frac{dq}{q} + \mathrm{ctg}\,p\,dp$$

而
$$pdq - PdQ = (p + \mathrm{ctg}\,p)dq - q\,\mathrm{ctg}^2 p\,dp$$

所得表达式是一恰当微分，因为

$$\frac{\partial}{\partial p}(p+\mathrm{ctg}\,p)=1-\frac{1}{\sin^2 p}=-\mathrm{ctg}^2 p$$

$$\frac{\partial}{\partial q}(-q\,\mathrm{ctg}\,p)=-\mathrm{ctg}^2 p$$

因此证明变换是正则的。母函数为

$$U=qp+q\,\mathrm{ctg}\,p \tag{7-109}$$

现在变换(7-109)。在第一类变换下，母函数应选为 q，Q 的函数。由(7-108)得

$$p=\cos^{-1}\sqrt{1-q^2e^{2Q}}$$

于是(7-109)写成

$$U_1=q\cos^{-1}\sqrt{1-q^2e^{2Q}}+\sqrt{e^{-2Q}-q^2} \tag{7-110}$$

作为验证，由(7-87)得

$$p=\frac{\partial U_1}{\partial q}=\cos^{-1}\sqrt{1-q^2e^{2Q}}$$

$$P=-\frac{\partial U_1}{\partial Q}=\sqrt{e^{-2Q}-q^2}$$

对第二类变换，母函数应选为 q，P 的函数。由(7-108)得

$$p=\mathrm{tg}^{-1}\frac{q}{P},\qquad Q=-\ln\sqrt{q^2+P^2}$$

让 U_2 与 (7-109)一样，由(7-93)得

$$\begin{aligned}F_2&=U_2+QP=qp+q\,\mathrm{ctg}\,p+QP\\&=q\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{q}{P}+P\left(1-\ln\sqrt{q^2+P^2}\right)\end{aligned} \tag{7-111}$$

作为验证，由(7-95)知

$$p=\frac{\partial F_2}{\partial q}=\mathrm{tg}^{-1}\frac{q}{P}$$

$$Q=\frac{\partial F_2}{\partial P}=-\ln\sqrt{q^2+P^2}$$

对第三类变换，母函数应选为 p，Q 的函数。由(7-108)得

$$q=e^{-Q}\sin p$$

由(7-100)知

$$F_3=U_3-qp=qp+q\operatorname{ctg}p-qp=e^{-Q}\cos p \qquad (7-112)$$

用(7-101)来检验，表明

$$P=-\frac{\partial F_3}{\partial Q}=-e^{-Q}\cos p,\ q=-\frac{\partial F_3}{\partial p}=-e^{-Q}\sin p$$

对第四类变换，母函数取为 p，P 的函数。由(7-108)知

$$q=P\operatorname{tg}p, \qquad Q=\ln\frac{\cos p}{P}$$

由(7-102)得

$$F_4=U_4-pq+PQ=P+P\ln\frac{\cos p}{P} \qquad (7-113)$$

用(7-103)来检验，表明

$$q=-\frac{\partial F_4}{\partial p}P\operatorname{tg}p$$

$$Q=\frac{\partial F_4}{\partial P}=\ln\frac{\cos p}{P}$$

在所有情况下，母函数都不显含 t，因此

$$H^*=H$$

例3. 用正则变换法求解一平面谐振子的运动。

解： 所谓平面谐振子是指一质量为m的质点在势能函数 $V=\frac{1}{2}m(\omega_1^2x^2+\omega_2^2y^2)$的影响下在平面 XOY 上的运动。此时，哈密顿函数为

$$H=T+V=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2)+\frac{1}{2}m(\omega_1^2x^2+\omega_2^2y^2)$$

如规定母函数为

$$U_1=\frac{1}{2}m(\omega_1x^2\operatorname{ctg}Q_1+\omega_2y^2\operatorname{ctg}Q_2)\tag{7-114}$$

它属于形式(7-85)。由(7-87)得

$$p_x=\frac{\partial U_1}{\partial x}=m\omega_1x\operatorname{ctg}Q_1$$

$$p_y=\frac{\partial U_1}{\partial y}=m\omega_2y\operatorname{ctg}Q_2$$

$$P_1=-\frac{\partial U_1}{\partial Q_1}=\frac{1}{2}m\omega_1x^2\csc^2Q_1$$

$$P_2=-\frac{\partial U_1}{\partial Q_2}=\frac{1}{2}m\omega_2y^2\csc^2Q_2$$

将所得 p_x, p_y 代入(7-88)，求得新的哈密顿函数

$$\begin{aligned}H^*=H&=\frac{1}{2m}(m^2\omega_1^2x^2\operatorname{ctg}^2Q_1+m^2\omega_2^2y^2\operatorname{ctg}^2Q_2)\\&\quad+\frac{1}{2}m(\omega_1^2x^2+\omega_2^2y^2)\\&=\frac{1}{2}m(\omega_1^2x^2\csc^2Q_1+\omega_2^2y^2\csc^2Q_2)\\&=\omega_1P_1+\omega_2P_2\end{aligned}\tag{7-115}$$

故用新的正则变量表示的谐振子的运动方程为

$$\left.\begin{aligned}\dot P_1=-\frac{\partial H^*}{\partial Q_1}=0,\qquad &\dot P_2=-\frac{\partial H^*}{\partial Q_2}=0\\ \dot Q_1=\frac{\partial H^*}{\partial P_1}=\omega_1,\qquad &\dot Q_2=\frac{\partial H^*}{\partial P_2}=\omega_2\end{aligned}\right\}\tag{7-116}$$

积分得

$$P_1=C_1,\ P_2=C_2,\ Q_1=\omega_1 t+\varepsilon_1,\ Q_2=\omega_2 t+\varepsilon_2$$

其中 C_1，C_2，ε_1，ε_2 为积分常数，由初始条件确定。而谐振子在 XOY 平面上的运动方程，回到原来坐标，是

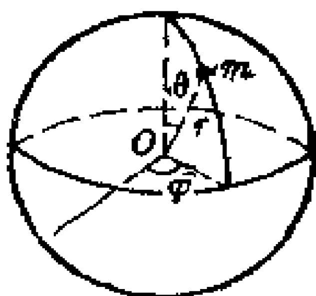
$$x=\sqrt{\frac{2C_1}{m\omega_1}}\sin(\omega_1 t+\varepsilon_1)$$

$$y=\sqrt{\frac{2C_2}{m\omega_2}}\sin(\omega_2 t+\varepsilon_2)$$

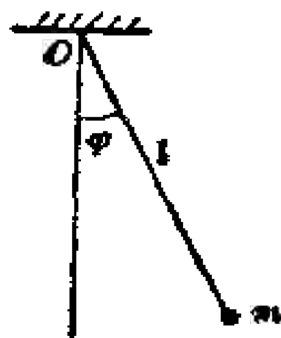
此例表明，在正则变换下新方程较原方程要简单得多。

第七章 习 题

7-1 求半不稳定系统（$T=T_2+T_1+T_0$，但 L 不包含时间 t）的哈密顿函数。



题 7-2 图



题 7-3 图

7-2 一质点在球坐标系中运动，其势能 $V=-\dfrac{b}{r}$，b 为常数。试写出它在球坐标（r，φ，θ）中的哈密顿函数（题 7-2 图）。

7-3 一质量为 m 的单摆，摆长为 l，φ 为瞬时 t 摆与

铅垂线的夹角（题 7-3 图）。试写出它的哈密顿正则方程。

7－4　力学系统的哈密顿函数分别具有下列形式：

(1) $H=\frac{1}{2}\left(p_1^2+\frac{p_2^2}{\sin^2 q_1}\right)-a\cos q_1$　（ a 为常数 ）

(2) $H=p_1p_2+q_1q_2$

试分别求该力学系统的拉格朗日函数。

答：(1) $L=\frac{1}{2}\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2\sin^2 q_1+a\cos q_1$

(2) $L=\dot{q}_1\dot{q}_2-q_1q_2$

7－5　力学系统的拉格朗日函数分别具有下列形式：

(1) $L=\frac{5}{2}\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2+\dot{q}_1\dot{q}_2\cos(q_1-q_2)$

$+3\cos q_1+\cos q_2$

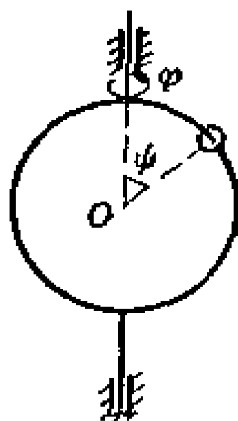
(2) $L=a\dot{q}_1^2+(c^2+b^2\cos^2 q_1)\dot{q}_2^2$　（ a,b,c 为常数 ）

试分别求该力学系统的哈密顿函数，并建立正则方程。

答：(1) $H=\frac{p_1^2+5p_2^2-2p_1p_2\cos(q_1-q_2)}{2(5-\cos^2(q_1-q_2))}$

$-3\cos q_1-\cos q_2$

(2) $H=\frac{p_1^2}{4a}+\frac{p_2^2}{4(c^2+b^2\cos^2 q_1)}$



题 7-6 图

7－6　质量为m的小重环沿质量为M半径为R的光滑金属丝圆周滑动，圆周绕其铅垂轴转动（题 7-6 图）。求哈密顿函数及正则方程。

答：$H=\frac{p_\varphi^2}{R^2(M+2m\sin^2\psi)}+\frac{p_\psi^2}{2mR^2}+mgR\cos\psi$

7-7　试计算泊松括号(k_K,p_S)，(k_K,k_S)，(x_S,k_K)，$(k^2,$

$k_s)(k,s=1,2,3)$，式中 x_1，x_2，x_3，p_1，p_2，p_3 是质点的直角坐标和动量分量，k_1，k_2，k_3 是对坐标原点的动量矩分量，而 $k^2=k_1^2+k_2^2+k_3^2$。

答：$(k_s,p_s)=(k_s,k_s)=(x_s,k_s)=0$，$(k_1,p_2)=-(k_2,p_1)=p_3$，$(k_3,p_1)=-(k_1,p_3)=p_2$，$(k_2,p_3)=-(k_3,p_2)=p_1$，$(x_1,k_2)=-(x_2,k_1)=x_3$，$(x_3,k_1)=-(x_1,k_3)=x_2$，$(x_2,k_3)=-(x_3,k_2)=x_1$，$(k_1,k_2)=k_3$，$(k_2,k_3)=k_1$，$(k_3,k_1)=k_2$，$(k^2,k_s)=0$。

7－8　试用泊松括号写出哈密顿正则方程。

7－9　试计算泊松括号(φ,ψ)：

(1)　$\varphi=q^2+p^2$，　$\psi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{p}{q}\right)$

(2)　$\varphi=q_s$，$\psi=q_k$　$(s,k=1,2,\cdots,n)$

(3)　$\varphi=q\cos\omega t+\frac{p}{\omega}\sin\omega t$，$\psi=p\cos\omega t-q\omega\sin\omega t$

(4)　$\varphi=\cos\left[\sum_{s=1}^{n}(p_s^2+q_s^2)\right]$

$\psi=\sin\left[\sum_{s=1}^{n}(p_s^2+q_s^2)\right]$

7－10　试证函数 $\varphi_1=p_1^2+q_2^2$，$\varphi_2=p_2^2+q_1^2$，$\varphi_3=(\varphi_1,\varphi_2)$是哈密顿函数 $H=p_1p_2+q_1q_2$ 的力学系统的第一积分。

7－11　试证对哈密顿函数为

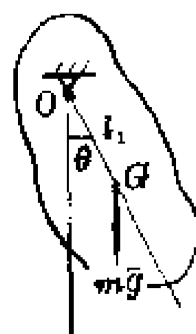
$H=H[f(q_1,q_2,\cdots,q_m,P_1,P_2,\cdots,p_m),q_{m+1},\cdots,q_n,$
$p_{m+1},\cdots,p_n,t]$

的方程组来说，函数 $f(q_1,q_2,\cdots,q_m,p_1,p_2\cdots,p_m)$是第一积分。

7－12　已知哈密顿函数为 $H=\frac{p^2}{2m}e^{-\frac{q}{a}}$，$a$ 为常数。

试建立哈密顿——雅科比方程并求解，证明H为常数。

7－13　试用哈密顿——雅科比定理解物理摆问题：刚体质量为M，刚体对悬点O的回转半径为k，重心在G，$OG=l_1$，OG与铅垂线夹角为θ（题7-13图）。



题 7-13 图

答：$t+t_0=\frac{\sqrt{2Mk^2}}{2}\int\frac{d\theta}{\sqrt{\alpha+Mgl_1\cos\theta}}$

7－14　一质量为1的质点在广义势能$V=\frac{1}{r}(1+\dot{r}^2)$作用下沿平面运动，$r$为点至原点$O$的距离。写出在极坐标$r$，$\theta$中的拉格朗日函数，并由此求$P_r$，$P_\theta$及$H$，得到正则方程，并证明对点$O$的动量矩为常数。

7－15　系统的拉格朗日函数在球坐标中为

$$L=\frac{1}{2}m[\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta]-af_1(\theta)\dot{\varphi}-bf_2(\theta)\dot{\theta}$$

$$-\frac{\beta}{r^2}f_3(\theta)-f_4(r)$$

试建立系统的哈密顿——雅科比方程，求该方程的全积分及运动规律。

答：　$S=-ht+\alpha_\varphi\varphi$

$$+\int\left[\sqrt{2m\left(\alpha_\theta-\beta f_3(\theta)-\frac{(\alpha_\varphi+af_1(\theta))^2}{\sin^2\theta}\right)}\right.$$

$$\left.-bf_2(\theta)\right]d\theta+\int\sqrt{2m\left(h-f_4(r)-\frac{\alpha_\theta}{r^2}\right)}dr$$

7－16　已知系统的哈密顿函数

$$H=\frac{1}{2}\left(p_1^2+\frac{p_2^2}{\cos^2 q_1}\right)+b\sin q_1$$

试建立系统的哈密顿——雅科比方程，求其全积分及运动规律。

答：$S=-ht+\alpha_1 q_2+\int\sqrt{2h-2b\sin q_1-\frac{\alpha_1^2}{\cos^2 q_1}}dq_1$

7－17　证明变换

$$Q=pe^q,\quad P=q+e^{-q}+\ln p$$

是正则变换。

7－18　证明在式(7-93)中由母函数

$$F_2(q_s,P_s)=\sum_{s=1}^{n}q_sP_s$$

给出的正则变换是恒等变换，即 $p_s=P_s$，$q_s=Q_s$。

7－19　如利用下列关系把变量 p，q 变换为 P，Q：$q=\varphi_1(P,Q)$，$p=\varphi_2(P,Q)$，则当 $\frac{\partial(q,p)}{\partial(Q,P)}=1$ 时，这种变换是一正则变换。

7－20　证明

$$q=(2Q)^{\frac{1}{2}}k^{-\frac{1}{2}}\cos P,\quad p=(2Q)^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}\sin P$$

代表一正则变换，并将正则方程

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p},\qquad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}$$

过渡到

$$\dot{Q}=\frac{\partial H^*}{\partial P},\qquad \dot{P}=-\frac{\partial H^*}{\partial Q}$$

式中

$$H=\frac{1}{2}(p^2+k^2q^2), \qquad H^*=kQ$$

7－21 利用正则变换，由正则方程求竖直上抛物体的运动规律。已知本问题的母函数

$$U=mg\left(\frac{1}{6}gQ^3+qQ\right)$$

式中 q 为确定物体位置的广义坐标。

第八章　力学的变分原理

分析力学的主要内容是阐述力学的普遍原理，由这些原理导出基本运动微分方程，并研究这些方程本身及其积分方法。第二章我们讲了虚位移原理，第三章讲了达朗伯——拉格朗日原理，这两个原理都是力学的基本变分原理。在这一章，我们专门叙述力学的变分原理——微分变分原理和积分变分原理。

第一节　变量、函数及其积分的变分

1. 运动的变分

在给定约束下，分析系统的所有可能的运动，从其中确定在已知主动力及初始条件下的真实运动，是分析力学的基本方法。正如前面看到的，运动微分方程的导出正基于此。当要积分运动微分方程时，就必须研究求得的运动对初始条件的依赖关系。为方便起见，我们认为力学系统的广义坐标 q_s 及广义速度 $\dot{q}_s$ 是 $2n$ 维空间中点的坐标，系统广义坐标和广义速度的总和$\{q_s,\ \dot{q}_s\}$表示系统某瞬时的运动学状态，所有这些状态依赖于初始状态$\{q_{s0},\dot{q}_{s0}\}$。如果我们按某种规律改变初值 $q_{s0},\dot{q}_{s0}$，就可以假想地给出系统所有可能的运动。

我们研究最简单的变化规律：设所有 q_{s0}、$\dot{q}_{s0}$ 仅依赖于某一个参数 α 而改变，即设

$$q_{s0}=\varphi_{s0}(\alpha),\ \dot{q}_{s0}=\psi_{s0}(\alpha),\ t_0=t_0(\alpha)$$

此时系统的轨道也改变，这些轨道开始于 $2n$ 维空间的不同点及不同的初始时刻。

如果仅改变坐标的初值 q_{s0} 及速度的初值 $\dot{q}_{s0}$，而时间 t_0 不变，此时系统的轨道将有不同的初始点，但沿每一轨道的运动在同一时刻 t_0 开始，即 t_0 不依赖于参数 α。初始及终止时刻都给定的这种改变，称为等时的，而此时系统运动的改变称为运动的等时变分。

现在假设，初始时刻 t_0 按某种规律改变，$t_0=t_0(\alpha)$。此时系统的轨道将有不同的初始点及不同的初始时刻及终止时刻。系统运动的这种变分，称为运动的非等时变分或全变分。

2. 变量的等时变分

我们研究两个无限接近的轨道，这两个轨道相应于参数 α 的接近的值：α 与 $\alpha+d\alpha$。我们令在给定时刻相应于参数值 α 和 $\alpha+d\alpha$ 的坐标为 q 及 q'，即

$$q=q(t,\alpha),\ q'=q(t,\alpha+d\alpha)$$

并将其差称为变量 q 的等时变分，记作 δq：

$$\delta q=q(t,\alpha+d\alpha)-q(t,\alpha) \tag{8-1}$$

我们将 $q(t,\ \alpha+d\alpha)$ 按 $d\alpha$ 展成级数并限于对 $d\alpha$ 的线性项，亦即

$$q(t,\alpha+d\alpha)=q(t,\alpha)+\frac{\partial q(t,\alpha)}{\partial\alpha}d\alpha \tag{8-2}$$

将(8-2)代入(8-1)，便得

$$\delta q=\frac{\partial q(t,\alpha)}{\partial\alpha}d\alpha \tag{8-3}$$

对相应变量 $\dot{q}$，p，的等时变分，我们类似地得到

$$\delta\dot{q}=\frac{\partial\dot{q}}{\partial\alpha}d\alpha,\qquad \delta p=\frac{\partial p}{\partial\alpha}d\alpha$$

这里 $\dot{q}=\frac{\partial q(t,\alpha)}{\partial t}$

等时变分有如下性质：对时间 t 的导数与变分运算是可交换的，即

$$\frac{d}{dt}\delta q=\delta\left(\frac{dq}{dt}\right) \tag{8-4}$$

实际上，因

$$\delta q=\frac{\partial q(t,\alpha)}{\partial\alpha}d\alpha$$

$$\frac{d}{dt}(\delta q)=\frac{\partial^2 q(t,\alpha)}{\partial\alpha\partial t}d\alpha \tag{8-5}$$

而

$$\delta\left(\frac{dq}{dt}\right)=\delta\dot{q}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial q(t,\alpha)}{\partial t}\right)d\alpha$$

$$=\frac{\partial^2 q(t,\alpha)}{\partial\alpha\partial t}d\alpha \tag{8-6}$$

比较(8-5)与(8-6)，便知(8-4)成立。

3. 变量的全变分

我们再研究两个无限接近的轨道上的两个点，此两轨道从不同位置与在不同时刻引出的。在某一流动时刻它的坐标为 $q(t,\alpha)$及 $q'(t,\alpha)$，但时间 t 也是参数 α 的函数 $t=t(\alpha)$，而因此 q 是 α 的复合函数

$$q=q[t(\alpha),\alpha]$$

现在写出坐标 q 的全变分，它是对 α 的微分，但考虑到 q 明显地依赖于 α 并且 t 也依赖于 α。用 Δq 表记全变分，得

$$\Delta q=\frac{\partial q[t(\alpha),\alpha]}{\partial \alpha}d\alpha+\frac{\partial q[t(\alpha),\alpha]}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \alpha}d\alpha \tag{8-7}$$

(8-7)中第一项等于等时变分 δq，第二项可用 Δt 表示时间对 α 的变分，即

$$\Delta t=\frac{\partial t}{\partial \alpha}d\alpha$$

于是我们最终得到

$$\Delta q=\delta q+\dot{q}\Delta t \tag{8-8}$$

4. 函数的变分

我们研究依赖于自变量 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$及 t 的函数 f 。首先建立 f 的等时变分表达式。因

$$f=f(q_s(\alpha,t),t]$$

故

$$\delta f=\frac{\partial f}{\partial \alpha}d\alpha$$

但

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial q_s}\frac{\partial q_s}{\partial \alpha}$$

因此

$$\delta f=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial q_s}\frac{\partial q_s}{\partial \alpha}d\alpha=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial q_s}\delta q_s$$

于是有

$$\delta f=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial q_s}\delta q_s \tag{8-9}$$

其次，建立 f 的全变分表达式。我们有

$$\Delta f=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial q_s}\frac{\partial q_s}{\partial \alpha}d\alpha+\dot{f}\frac{\partial t}{\partial \alpha}d\alpha \tag{8-10}$$

其中 $\dot{f}$ 是按通常原则计算的 f 对 t 的全导数。注意到 (8-10) 的第一项是函数 f 的等时变分 δf，而 $\dot{f}$ 的系数是 Δt。因此，

函数 f 的全变分最终表示为

$$\Delta f=\delta f+\dot{f}\Delta t \tag{8-11}$$

公式(8-11)可推广到形如 $F[q_s(\alpha,t),\dot{q}_s(\alpha,t),t]$ 的函数的全变分计算。

5. 依赖于动力学函数的定积分的变分

我们把依赖于时间 t、广义坐标 q_s 及广义速度 $\dot{q}_s$ 的函数，或者依赖于时间 t，广义坐标 q_s 及表征力学系统运动的动量 p_s的函数，理解为动力学函数。如动能 T，拉格朗日函数 L，哈密顿函数 H，系统的总能量 E，力函数 U，势能 V 及其它等，都是动力学函数。

我们在时间区间 (t_1, t_2) 上研究沿着系统某个轨道的积分，其被积函数依赖于 t、q_s、$\dot{q}_s$，而这些变量本身是参数 α 的函数，即研究积分

$$J=\int_{t_1}^{t_2}F[t(\alpha),q_s(t(\alpha),\alpha),\dot{q}_s(t(\alpha),\alpha)]dt \tag{8-12}$$

因此，积分(8-12)依赖于参数 α 的值。

现在将沿已知轨道的这个积分的量值与沿无限接近于已知轨道的轨道的量值相比较。为此要计算已给积分的变分

$$\delta J=\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha}d\alpha \tag{8-13}$$

首先，设积分限 t_1 及 t_2 不依赖于参数 α，这时 δJ 是积分 J 的等时变分。被积函数在给定的 $q_s(t,\alpha)$, $\dot{q}_s(t,\alpha)$下是某个函数 $f(t,\alpha)$。因此，积分(8-12)可写成

$$J=\int_{t_1}^{t_2}f(t,\alpha)dt$$

由积分学知，定积分对参数 α 的导数应等于被积函数对参数

的导数在同一界限内的积分，即(8-13)可写成

$$\delta J=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial f(t,\alpha)}{\partial\alpha}dtd\alpha \tag{8-14}$$

其次，如果积分限依赖于参数 α，则有

$$\frac{\partial J}{\partial\alpha}=\int_{t_1(\alpha)}^{t_2(\alpha)}\frac{\partial f(t,\alpha)}{\partial\alpha}dt+f[t_2(\alpha),\alpha]\frac{\partial t_2(\alpha)}{\partial\alpha}-f[t_1(\alpha),\alpha]\frac{\partial t_1(\alpha)}{\partial\alpha} \tag{8-15}$$

据(8-14)及(8-15)，我们得

$$\delta J=\left[\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial f(t,\alpha)}{\partial\alpha}dt\right]d\alpha=\delta\int_{t_1}^{t_2}fdt$$

$$\begin{aligned}\Delta J&=\delta J+\left[f(t_2(\alpha),\alpha)\frac{\partial t_2(\alpha)}{\partial\alpha}-f(t_1(\alpha),\alpha)\frac{\partial t_1(\alpha)}{\partial\alpha}\right]d\alpha\\&=\delta\int_{t_1}^{t_2}fdt+f\Delta t\Big|_{t_1}^{t_2}\end{aligned} \tag{8-16}$$

公式(8-16)可写成

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2}fdt=\delta\int_{t_1}^{t_2}fdt+f\Delta t\Big|_{t_1}^{t_2} \tag{8-17}$$

又

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\Delta fdt&=\int_{t_1}^{t_2}(\delta f+\dot{f}\Delta t)dt\\&=\int_{t_1}^{t_2}[\delta f-f(\Delta t)']dt+f\Delta t\Big|_{t_1}^{t_2}\end{aligned} \tag{8-18}$$

由(8-17)、(8-18)得

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2}fdt=\int_{t_1}^{t_2}[\Delta f+f(\Delta t)']dt \tag{8-19}$$

第二节　微分变分原理与积分变分原理

力学系统在力的作用下运动时的一般状态，在每一时刻由下面这些量的总和来确定：时间 t，系统中点的质量 m_i，主动力 $\boldsymbol{F}_i$，约束反力 $\boldsymbol{R}_i$，点的矢径 $\boldsymbol{r}_i$，点的速度 $\dot{\boldsymbol{r}}_i$，点的加速度 $\ddot{\boldsymbol{r}}_i$。

我们将质点系的实际运动（真实运动）与无限接近它的、按某种特征的邻近运动相比较，则满足牛顿第二定律

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i \quad (i=1,2,\cdots,N)$$

的实际运动将使某个动力学函数

$$G(t;m_i,\boldsymbol{r}_i,\dot{\boldsymbol{r}}_i,\ddot{\boldsymbol{r}}_i,\boldsymbol{F}_i,\boldsymbol{R}_i) \quad (i=1,2,\cdots,N)$$

达到稳定值，亦即相应于所选特征的邻近运动，这个函数之变分对真实运动来说等于零：

$$\delta G=0 \tag{8-20}$$

变分原理可分微分变分原理和积分变分原理两大类型。

如果函数 G 直接是所有明显地出现于它表达式中的变量的函数，那么关系(8-20)称为微分变分原理，它是每一瞬时判别真实运动的准则。如果 G 是泛函，亦即函数 G 是定积分，例如为某另外的动力学函数对时间 t 的积分

$$G=\int_{t_1}^{t_2}\phi(t,m,\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},\quad\ddot{\boldsymbol{r}},)dt$$

那么关系

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\phi dt=0 \tag{8-21}$$

表示积分变分原理，它给出判别一段时间过程内真实运动的

准则。

第三节 微分变分原理

所有已知的微分变分原理可归为一类：可比较的运动仅在元素 $\boldsymbol{r}_i$，$\dot{\boldsymbol{r}}_i$，$\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 中的一个元素有差别，因而函数 δG 有如下的结构形式

$$\delta G=\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i)\cdot\delta\overset{(k)}{\boldsymbol{r}}_i=0 \qquad (8\text{-}22)$$

1. 虚位移原理

虚位移原理表示质点系的平衡条件，由第二章知，它表示为

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \qquad (8\text{-}23)$$

实际上，由(8-22)取 $\ddot{\boldsymbol{r}}_i=0, k=0$，便得(8-23)。

2. 达朗伯——拉格朗日原理

即动力学普遍方程，由第三章知为

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \qquad (8\text{-}24)$$

实际上，由(8-22)取 $k=0$ 便得(8-24)。

3. 茹尔当原理

由(8-22)取 $k=1$，即可比较的运动仅是点的速度不同，便得茹尔当(Jourdain)原理

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i)\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_i=0 \qquad (8\text{-}25)$$

因为这时实际运动与比较运动的 m_i，$\ddot{\boldsymbol{r}}_i$，$\boldsymbol{F}_i$ 是一样的，

它们的变分都是零，因此(8-25)可写成

$$\delta\left[\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i)\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\right]=0 \qquad (8\text{-}26)$$

(8-26)变分号下的项表示主动力 $\boldsymbol{F}_i$ 和惯性力 $-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 的合力的功率。因此，茹尔当原理可表述如下：在仅仅速度不同的所有运动中，函数 $\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i)\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 达到稳定值仅在真实运动中，此真实运动满足牛顿第二定律。

必须注意，茹尔当原理中约束的理想性表为

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_i=0$$

茹尔当原理是推导一阶非线性非完整约束系统的运动方程的主要依据。

4. 高斯原理

由(8-22)取 $k=2$，便得高斯(Gauss)原理

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i)\cdot\delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i=0 \qquad (8\text{-}27)$$

这表明，在所有的仅仅加速度不同（当不改变 $\boldsymbol{r}_i$，$\dot{\boldsymbol{r}}_i$，$\boldsymbol{F}_i$，m_i 时）的可能运动中，关系(8-27)仅在真实运动中得以满足。

必须注意，高斯原理中约束的理想性表为

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\ddot{\boldsymbol{r}}_i=0$$

高斯原理有非常有趣的物理意义。我们来阐明高斯原理的物理意义。因矢量 $\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 表示点在主动力 $\boldsymbol{F}_i$ 及约束力 $\boldsymbol{R}_i$ 作用下的真实加速度，我们将其记作 $\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{a}_i$，于是(8-27)取形

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i a_i+F_i)\cdot\delta a_i=0 \qquad (8\text{-}28)$$

既然所加力 $\boldsymbol{F}_i$ 及质量 m_i 给定且不改变，那么变分 $\delta\boldsymbol{a}_i$ 可写成

$$\delta\boldsymbol{a}_i=-\delta\left(\frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}-\boldsymbol{a}_i\right)$$

于是表达式(8-28)可改写为

$$-\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}-\boldsymbol{a}_i\right)\cdot\delta\left(\frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}-\boldsymbol{a}_i\right)=0 \qquad (8\text{-}29)$$

或者

$$\delta\left\{\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\left(\dfrac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}-\boldsymbol{a}_i\right)^2}{2}\right\}=0 \qquad (8\text{-}30)$$

因 $\dfrac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}=\boldsymbol{a}_i^*$ 乃是点在主动力 $\boldsymbol{F}_i$ 作用下不加约束时所具有的加速度。表达式 $\dfrac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}-\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{a}_i^*-\boldsymbol{a}_i$ 表示自由运动的加速度与实际运动的加速度之差。

高斯把量

$$Zw=\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_i^*-\boldsymbol{a}_i)^2 \qquad (8\text{-}31)$$

称为“拘束”（Zwang），因之高斯原理的形式(8-30)称最小拘束原理。它表示实际存在的运动是这样的：量 Zw 取运动时与给定运动学约束相合的所有可能值中的最小值。

例题

两质量为 m_1 及 m_2 的物体拴于不可伸长的线端，此线跨过半径为 r 的固定滑轮（不计质量），不计摩擦，试确定系

统的运动。

解：设物体的坐标为 z_1 及 z_2(图 8-1)，有绳长不变的约束条件，即

$$z_1+z_2+\pi r=const$$

因此

$$\dot{z}_1+\dot{z}_2=0, \text{ 或 } \dot{z}_2=-\dot{z}_1$$
$$\ddot{z}_2=-\ddot{z}_1$$

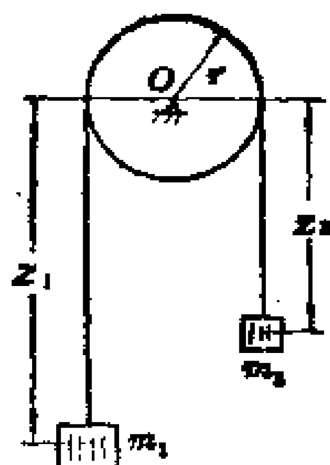


图 8-1

如果没有约束，那么两物体的加速度为 $a_1^*=a_2^*=g$，而当有约束时，加速度为 a_1 及 $-a_1$。高斯拘束为

$$Zw=\frac{1}{2}m_1(g-a_1)^2+\frac{1}{2}m_2(g+a_1)^2$$

加速度应使拘束的变分为零，即

$$\delta Zw=0 \text{ 或 } \frac{\partial Zw}{\partial a_1}=0$$

即

$$-m_1(g-a_1)+m_2(g+a_1)=0$$

由此解得

$$a_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g$$

第四节　哈密顿原理

按照积分变分原理，在真实运动中某个动力学函数在某段时间内的定积分取稳定的值，这是与所有邻近运动以同样积分的值相比较的，这些邻近运动的区别在于出现被积函数

中的自变量的这样或那样的变分。另一种说法则是：仅对真实运动所给积分的变分才等于零。

分析力学中的积分变分原理以哈密顿最小作用量原理与拉格朗日最小作用量原理为著名。

1、 哈密顿最小作用量原理

我们把积分

$$S=\int_{t_1}^{t_2}Ldt \tag{8-32}$$

其中 L 为系统的拉格朗日函数，称为哈密顿意义下的作用量。在哈密顿原理中，所有可比较的运动的某些特征是共同的，而某些是不同的。这些运动有下列三个共同特点：

(1) 系统是完整的，保守的；

(2) 所有可比较的运动在同样的时刻 t_1 开始，并在同样的时刻 t_2 结束。因此，可比较的运动在同一时间间隔 t_2-t_1 内完成。在所有运动中，时间的变化规律一样，即时间 t 不变更。因此，所有变量的变分是等时的；

(3) 既然所有可比较的运动由同一点在同一时刻 t_1 开始，并在同一点在同一时刻 t_2 结束，亦即所有广义坐标 q_s 的值在这些时刻彼此相等。因此，广义坐标的等时变分在这些边值上恒等于零：

$$(\delta q_s)_{t=t_1}\equiv 0,(\delta q_s)_{t=t_2}\equiv 0 \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{8-33}$$

为讨论方便起见，我们把完整系统的运动与一个以 q_1，q_2，$\cdots$，q_n 为坐标的 n 维空间中的点的运动相对应。因此，两个相比较的运动具有共同的起点 B_1 和共同的终点 B_2 的两条线来描述（图 8-2）。因为在相比较的运动中系统在同样的

间间隔内经过不同的距离，那么在相应时刻的广义速度是不同的，因此在相应时刻的动能的数值也不同。而依赖于坐标的势能的值也不相同。



图 8-2

在所列举的加在可比较的运动上的三个条件下，哈密顿原理可简述如下：

在相同的时间、相同的起始和终了位置和相同的约束条件下，双面、完整、保守系统，在所有可能的各种运动中，真实运动是使哈密顿作用量具有稳定值。即

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2}L(q_s,\dot{q}_s,t)dt=0 \qquad (8-34)$$

哈密顿原理(8-34)也是力学的基本原理，并且它把力学原理归结为更一般的形式。同时，它和坐标选择无关，因此，更具有普遍性并在多方面应用上更为方便。例如，应用哈密顿原理来推导拉格朗日方程和正则方程就比以前更为简单更为自然。当然，这不单是反映数学逻辑推理上的巧妙，而且，主要的是反映了这个原理更深刻地揭示了客观事物之间紧密的联系。

2. 用哈密顿原理推导拉格朗日方程

为由哈密顿原理推导出拉格朗日方程，我们将 δS 写成展开的形式

$$S=\int_{t_1}^{t_2}Ldt,\quad \delta S=\frac{\partial S}{\partial\alpha}d\alpha \quad (\alpha\text{ 为参数})$$

或者

$$\delta S=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\int_{t_1}^{t_2}Ldt\right)d\alpha \qquad (8-35)$$

由数学分析知，定积分对某个参数的导数，在积分限不依赖于给定参数的情形时，等于被积函数对参数的导数在积

分限 t_1 和 t_2 之间的积分。因此

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial \alpha}d\alpha\right)dt=\int_{t_1}^{t_2}(\delta L)dt \qquad (8\text{-}36)$$

我们计算 δL。因 L 是 q_s、$\dot{q}_s(s=1, 2, \cdots, n)$及 t 的函数，但时间 t 不变更，因此有

$$\begin{aligned}\delta L &= \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\frac{\partial q_s}{\partial \alpha}d\alpha+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \alpha}d\alpha\right)\\ &= \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta \dot{q}_s\right)\end{aligned}$$

于是(8-36)成为

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta \dot{q}_s\right)dt \qquad (8\text{-}37)$$

对于完整系统，存在关系(8-4)，即

$$\delta \dot{q}_s=\frac{d}{dt}(\delta q_s) \quad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (8\text{-}38)$$

将(8-38)代入(8-37)，得

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{d}{dt}(\delta q_s)\right)dt \qquad (8\text{-}39)$$

(8-39)括号中的第二项可写成

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{d}{dt}(\delta q_s)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s\right)-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s \qquad (8\text{-}40)$$

故将(8-40)代入(8-39)得

$$\begin{aligned}\delta S=&\int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s\right\}dt\\ &+\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s\right)dt \qquad (8\text{-}41)\end{aligned}$$

(8-41)中第二项可积分为

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s\right)\Big|_{t_1}^{t_2}=\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s\right)_{t=t_2}-\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s\right)_{t=t_1} \qquad (8-42)$$

由条件(8-33)知(8-42)的两个和恒为零。因此，哈密顿原理的条件 $\delta S=0$ 成为

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s\right\}dt=0 \qquad (8-43)$$

这个等式对任何的积分区间，即对任何的积分限 t_1 及 t_2，都是对的。由数学分析中得知，一个定积分在任何积分区间等于零，仅当被积函数等于零时才是可能的。因此，得出

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s=0 \qquad (8-44)$$

因所研究的系统是完整的，所有 δq_s 是独立的，那么(8-44)中的每个括号都应等于零，亦即得到拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \quad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (8-45)$$

当然，也可由拉格朗日方程，反过来推求 $\delta S=0$。

3. 利用哈密顿原理推导正则方程

据哈密顿函数的定义(7-3)，有

$$H=-L+\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s \qquad (8-46)$$

将(8-46)代入哈密顿原理表达式，有

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta\left(\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s-H\right)dt=0$$

作变分运算，得

$$0=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{s=1}^{n}\Big[\dot{q}_s\delta p_s+p_s\delta\dot{q}_s-\frac{\partial H}{\partial q_s}\delta q_s-\frac{\partial H}{\partial p_s}\delta p_s\Big]dt \tag{8-47}$$

由求微分和求变分的可交换性，有

$$\delta\dot{q}_s=\frac{d}{dt}(\delta q_s)$$

故 $$p_s\delta\dot{q}_s=p_s\frac{d}{dt}(\delta q_s)=\frac{d}{dt}(p_s\delta q_s)-\dot{p}_s\delta q_s$$

将其代入(8-47)，得

$$0=\sum_{s=1}^{n}(p_s\delta q_s)\Big|_{t_1}^{t_2}+\sum_{s=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}\Big[\Big(\dot{q}_s-\frac{\partial H}{\partial p_s}\Big)\delta p_s-\Big(\dot{p}_s+\frac{\partial H}{\partial q_s}\Big)\delta q_s\Big]dt \tag{8-48}$$

由可能运动的始、终位置相同，所以有

$$(p_s\delta q_s)\Big|_{t_1}^{t_2}=0 \tag{8-49}$$

而且，由(8-46)两边对 p_s 求导数，得

$$\frac{\partial H}{\partial p_s}=\dot{q}_s\quad(s=1,2,\cdots,n) \tag{8-50}$$

将(8-49)、(8-50)代入(8-48)，并由 δq_s 的独立性，便得

$$\dot{p}_s+\frac{\partial H}{\partial q_s}=0\quad(s=1,2,\cdots,n) \tag{8-51}$$

联合(8-50)与(8-51)，即为正则方程(7-8)。

4. **哈密顿原理的例子**

哈密顿原理表明，在真实运动中的哈密顿作用量与在确

定条件下与真实运动相比较的变动运动的值相比较，取稳定值。但是，是达到最大还是最小呢？这个问题要进一步探讨。我们举一例子来说明这一问题。

我们研究单位质量的质点在有力函数 $U(x)$ 的势力场中的一维运动。运动微分方程为

$$\ddot{x}=\frac{dU}{dx}$$

设 $x(t)$ 为真实运动，并且有 $x(t_1)=x_1$，$x(t_2)=x_2$，$t_2-t_1>0$。设 $x'(t)$ 是满足同样条件的与真实运动相比较的运动。因此有

$$x'(t)=x(t)+\alpha(t)$$

其中 $\alpha(t)$为任意函数，但有 $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)=0$。

用 S 及 S' 表记对真实运动和相比较的运动的哈密顿作用量，相应的动能为 T 及 T'，力函数为 U 及 U'。我们有

$$\begin{aligned}S'-S&=\int_{t_1}^{t_2}[(T'+U')-(T+U)]dt\\&=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{1}{2}(\dot{x}+\dot{\alpha})^2-\frac{1}{2}\dot{x}^2+U(x+\alpha)\right.\\&\qquad\left.-U(x)\right\}dt\end{aligned}\tag{8-52}$$

因

$$\int_{t_1}^{t_2}\dot{\alpha}\dot{x}dt=\dot{x}\alpha\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\alpha\ddot{x}dt=-\int_{t_1}^{t_2}\alpha\frac{dU}{dx}dt$$

于是

$$\begin{aligned}S'-S=\int_{t_1}^{t_2}&\left\{\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2+U(x+\alpha)-U(x)\right.\\&\left.-\alpha\frac{dU(x)}{dx}\right\}dt\end{aligned}\tag{8-53}$$

对力函数利用泰勒公式

$$U(x+\alpha)=U(x)+\alpha\frac{dU(x)}{dx}+\frac{1}{2}\quad\frac{d^2U(x+\theta\alpha)}{dx^2}$$

$$0<\theta<1$$

因此(8-53)为

$$S'-S=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left[\dot{\alpha}^2+\alpha^2\frac{d^2U(x+\theta\alpha)}{dx^2}\right]dt,\quad 0<\theta<1$$

(8-54)

如果在整个力场中$\frac{d^2U}{dx^2}\geqslant 0$，那么(8-54)的被积函数是正的，有$S'-S>0$，因此对真实运动来说，哈密顿作用量与所有另外的运动相比较是取最小的。

特别地，点在均匀重力场$\left(\frac{d^2U}{dx^2}=0\right)$中的直线运动以及具有距离的单调不减函数$\left(例如，U=a^2x^2, \frac{d^2U}{dx^2}=2a^2>0\right)$的中心斥力场中的直线运动，上述结论是正确的。

5. 非保守系统的哈密顿原理

完整非保守系统的哈密顿原理写成

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta T+\delta' A)dt=0 \qquad (8-55)$$

其中 $\delta' A=\sum_{s=1}^{n}Q_s\delta q_s$ 为广义力的虚功之和，并非某函数的变分。必须注意到，原理(8-55)本质上不同于保守系统的哈密顿原理(8-34)，因为一般来说不存在某个值使其变分等于(8-55)的左端。但是，当 Q_s 为保守力时，可由原理(8-55)导出原理(8-34)。实际上，如 Q_s 是保守的，则存在力函数 U 使得

$$Q_s=\frac{\partial U}{\partial q_s}$$

因此 $\delta' A=\delta U$，原理(8-55)成为

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta L dt=0$$

由变分与积分可交换而得

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt=0 \tag{8-56}$$

这便是原理(8-34)。

现在由原理(8-55)导出拉格朗日方程。

因
$$\begin{aligned}\delta T&=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\delta\dot{q}_s\\&=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\frac{d}{dt}(\delta q_s)\\&=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s\\&\quad+\sum_{s=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s\right)\end{aligned}$$

将其代入原理(8-55)，得

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}+Q_s\right)\delta q_s\right\}dt+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s\Big|_{t_1}^{t_2}=0$$

注意到(8-33)，上式写成

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}+Q_s\right)\delta q_s\right\}dt=0 \tag{8-57}$$

由此得到

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}+Q_s\right)\delta q_s=0 \qquad (8-58)$$

因(8-58)中的 δq_s 是独立的，我们得到一般完整系统的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s \quad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (8-59)$$

6. 非完整系统的哈密顿原理

历史上关于非完整系统的哈密顿原理曾有过激烈的争论，争论的实质与运算 δ 与运算$\frac{d}{dt}$的可交换性有关。争论双方的代表人物是霍尔德(Hölder)和苏斯洛夫(Суслов)，前者认为对所有坐标，无论系统完整与否，都有

$$\frac{d}{dt}\delta q_s-\delta\dot{q}_s=0 \quad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (8-60)$$

后者认为关系(8-60)仅对与独立速度相应的广义坐标才对。如果系统受 g 个非完整约束

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\dot{q}_{\varepsilon+\beta}(q_s,\dot{q}_\sigma,t) \quad \begin{pmatrix}\beta=1,2,\cdots,g; & \varepsilon=n-g\\ \sigma=1,2,\cdots,\varepsilon; & s=1,2,\cdots,n\end{pmatrix} \qquad (8-61)$$

则有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\delta q_\sigma-\delta\dot{q}_\sigma=0\\ &\frac{d}{dt}\delta q_{\varepsilon+\beta}-\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_\sigma^{\varepsilon+\beta}\delta q_\sigma\end{aligned}\right\} \qquad (8-62)^*$$

其中

---

* 公式(8-62)的推导见"非完整系统力学中的交换关系"，《力学与实践》1979年第三期 p37→p38。

$$T_{\sigma}^{\varepsilon+\beta}=\frac{d}{dt}\frac{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial\dot{q}_{\sigma}}-\frac{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_{\sigma}}-\sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}\frac{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\gamma}}{\partial\dot{q}_{\sigma}} \tag{8-63}$$

现在由达朗伯——拉格朗日原理导出非完整系统的哈密顿原理。达朗伯——拉格朗日原理(4-19)为

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q_s+\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\right)\delta q_s=0 \tag{8-64}$$

因

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\right)\delta q_s&=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_s}\delta q_s\\&-\sum_{s=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s\right)+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{d}{dt}\delta q_s-\delta\dot{q}_s\right)\\&+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\delta\dot{q}_s=\delta T-\sum_{s=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s\right)\\&+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_s}\left(\frac{d}{dt}\delta q_s-\delta\dot{q}_s\right)\end{aligned}$$

于是(8-64)写成

$$\delta A'+\delta T-\sum_{s=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s\right)+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{d}{dt}\delta q_s-\delta\dot{q}_s\right)=0 \tag{8-65}$$

将(8-65)从 t_1 至 t_2 积分，并注意条件(8-33)，我们得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\delta T+\delta' A+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{d}{dt}\delta q_s-\delta\dot{q}_s\right)\right\}dt=0 \tag{8-66}$$

这便是非完整系统的一般形式的哈密顿原理。将(8-60)代入(8-66)，便得哈密顿原理的霍尔德形式

$$\int_{t_1}^{t_2}\{\delta T+\delta' A\}dt=0 \tag{8-67}$$

它形式上与完整非保守系统的哈密顿原理(8-55)完全一样。

但是必须注意，(8-67)中出现的 δq_s 并不是彼此独立的，而要受到非完整约束的限制。

将(8-62)代入原理(8-66)，便是哈密顿原理的苏斯洛夫形式

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\delta T+\delta' A+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_{\sigma}^{\varepsilon+\beta}\delta q_{\sigma}\right\}dt=0 \tag{8-68}$$

原理(8-67)与(8-68)都是正确的。

例题 一单位质量的质点在有势力作用下沿平面 XY 运动。势能 $V=V(x,y)$，令所受约束使其轨迹的斜率与时间成正比，试写出此情形的哈密顿原理。

解：约束方程为

$$t\dot{x}-\dot{y}=0 \tag{8-69}$$

虚位移方程为

$$t\delta x-\delta y=0 \tag{8-70}$$

广义力之虚功为

$$\delta' A=-\delta V=-\frac{\partial V}{\partial x}\delta x-\frac{\partial V}{\partial y}\delta y$$

注意到(8-70)，我们有

$$\delta' A=-\left(\frac{\partial V}{\partial x}+t\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta x \tag{8-71}$$

动能为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

其变分为
$$\delta T=\dot{x}\delta\dot{x}+\dot{y}\delta\dot{y} \tag{8-72}$$

那么 $\delta\dot{y}=$？两种观点有两种结果：

按霍尔德观点有(8-60)，即

$$\delta\dot{x}=\frac{d}{dt}\delta x$$

$$\delta\dot{y}=\frac{d}{dt}\delta y$$

对(8-70)求导数，得

$$\frac{d}{dt}\delta y=\delta x+t\frac{d}{dt}\delta x$$

因此
$$\delta\dot{y}=\delta x+t\delta\dot{x} \tag{8-73}$$

于是
$$\delta T=\dot{x}\delta\dot{x}+\dot{y}\delta x+t\dot{y}\delta\dot{x}=(1+t^2)\dot{x}\delta\dot{x}+t\dot{x}\delta x \tag{8-74}$$

将(8-71)和(8-74)代入原理(8-67)，得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{(1+t^2)\dot{x}\delta\dot{x}+\left(t\dot{x}-\frac{\partial V}{\partial x}-t\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta x\right\}dt=0 \tag{8-75}$$

按苏斯洛夫观点，有(8-62)，即

$$\delta\dot{x}=\frac{d}{dt}\delta x$$

$$\delta\dot{y}=\frac{d}{dt}(\delta y)-\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial\dot{y}}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial\dot{y}}{\partial x}-\frac{\partial\dot{y}}{\partial y}\frac{\partial\dot{y}}{\partial\dot{x}}\right]\delta x$$

$$=\frac{d}{dt}(\delta y)-\delta x=t\frac{d}{dt}\delta x=t\delta\dot{x} \tag{8-76}$$

于是
$$\delta T=\dot{x}\delta\dot{x}+\dot{y}\delta\dot{y}=(1+t^2)\dot{x}\delta\dot{x} \tag{8-77}$$

将(8-71)和(8-77)代入原理(8-68)，并注意到(8-62)中的$T_x^y=1$，我们仍得到(8-75)。

必须注意不可将(8-77)代入原理(8-67)。同样地，也不可将(8-74)代入原理(8-68)，否则将导致错误的结果。这个错误结果之一是

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[(1+t^2)\dot{x}\delta\dot{x}-\left(\frac{\partial V}{\partial x}+t\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta x\right]dt=0 \quad (8\text{-}78)$$

7. 哈密顿原理对近似解法的应用

哈密顿原理特别适用于近似解法，在连续介质力学、结构力学等领域中用得很广泛。下面举例说明这个原理的意义以及近似解法的基本思想。

例题 质量为$m=1$的质点在平面XY上运动，外力的势能由$V=xy$给出。在$t=0$时，它在原点(0, 0)，在$t=1$时，它在(2,0)。求质点的运动。

解： 我们先求精确解，以便与近似解作比较。

拉格朗日函数是

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-xy$$

相应的拉格朗日方程是

$$\ddot{x}+y=0, \qquad \ddot{y}+x=0$$

它的通解是

$$x=C_1\sin t+C_2\cos t+C_3\operatorname{sh}t+C_4\operatorname{ch}t$$

$$y=C_1\sin t+C_2\cos t-C_3\operatorname{sh}t-C_4\operatorname{ch}t$$

满足题中端点条件的特解是

$$x=\frac{\sin t}{\sin 1}+\frac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{sh}1}, \quad y=\frac{\sin t}{\sin 1}-\frac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{sh}1} \qquad (8\text{-}79)$$

这是精确解。它使哈密顿作用量

$$S=\int_0^1\left[\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-xy\right]dt \qquad (8\text{-}80)$$

取得极小值

$$S_{\min}=\operatorname{ctg}1+\operatorname{cth}1=1.955128$$

下面用李兹(Ritz)法求近似解。在X-t图上和Y-t图

上连结两给定端点的直线方程是

$$x=2t,\quad y=0$$

现在再加上两端均为零的函数，这种在 $t=0$ 和 $t=1$ 都等于零的最简单的函数是 $t(1-t)$。因而我们选取

$$x=2t+\alpha t(1-t),\ y=\beta t(1-t) \qquad (8\text{-}81)$$

作为可能运动的集合（图 8-3）。这里 α，β 是参数，它们是 $x(t)$ 和 $y(t)$ 偏离直线的一种度量。

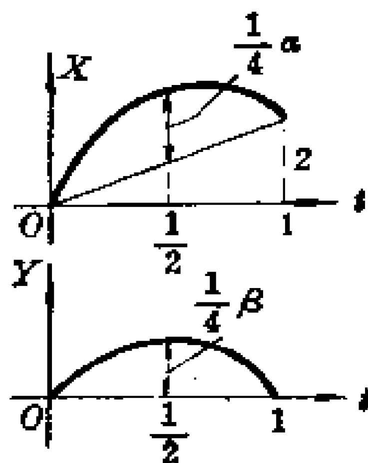


图 8-3

将(8-81)代入(8-80)求得哈密顿作用量 S 为

$$\begin{aligned}S&=S(\alpha,\beta)\\&=\int_0^1\Big[\frac{1}{2}(2+\alpha-2\alpha t)^2\\&\quad+\frac{1}{2}\beta^2(1-2t)^2\\&\quad-(2t+\alpha t-\alpha t^2)\beta t(1-t)\Big]dt\end{aligned}$$

下面求使 $S(\alpha,\beta)$取得极值的 α 和 β。

令

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha}=0,\qquad \frac{\partial S}{\partial\beta}=0$$

得

$$\int_0^1[(2+\alpha-2\alpha t)(1-2t)-(t-t^2)\beta t(1-t)]dt=0$$

$$\int_0^1[\beta(1-2t)^2-(2t+\alpha t-\alpha t^2)t(1-t)]dt=0$$

积分后得

$$\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{30}\beta=0,\qquad -\frac{1}{30}\alpha+\frac{1}{3}\beta=\frac{1}{6}$$

解得

$$\alpha=\frac{5}{99},\qquad \beta=\frac{50}{99}$$

代回(8-81)，求得近似解为

$$x=2t+\frac{5}{99}t(1-t),\ y=\frac{50}{99}t(1-t)\qquad(8-82)$$

这组近似解(8-82)和精确解(8-79)在时间的大范围内性能极不一样，但是在我们所关心的时间间隔(0，1)内，(8-82)和(8-79)的差别不大，见附表。相应于(8-82)的 S 值为 $\frac{12793}{6534}$ $=1.957912$。

这里采用最简单的函数作为近似解，x 和 y 各保留了一个参数，其结果仍有参考价值。

如果事先知道 $y(t)$左右不对称，峰值偏右，我们可以在(8-81)中将 y 改用

$$y=\beta t(1-t^2)$$

精确度就可以提高。改进后的解是

$$\left.\begin{aligned}x&=2t+\frac{16}{317}t(1-t)\\ y&=\frac{320}{951}t(1-t^2)\end{aligned}\right\}\qquad(8-83)$$

其中的 x 与(8-82)中的 x 值相差很小，因为两式中的系数

$$\frac{5}{99}=0.050505\cdots,\qquad \frac{16}{317}=0.050473\cdots$$

相差甚微，而 $y(t)$的值如附表最后一列所示，它有了显著改进。相应于(8-83)的 S 值是$\frac{5578}{2853}=1.955135$。

附　　表

t	精确解(8-79)		近似解(8-82)		改进后解(8-83)
	$x(t)$	$y(t)$	$x(t)$	$y(t)$	$y(t)$
0	0	0	0	0	0
0.2	0.4074	0.0648	0.4081	0.0808	0.0646
0.4	0.8123	0.1133	0.8121	0.1212	0.1131
0.6	1.2128	0.1293	1.2121	0.1212	0.1292
0.8	1.6082	0.0968	1.6081	0.0808	0.0969
1	2	0	2	0	0
	$S_{min}=1.955128$		$S=1.957912$		1.955135

第五节　拉格朗日最小作用量原理

我们将

$$A=\int_{t_1}^{t_2}2T\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2\,dt \qquad (8\text{-}84)$$

称为拉格朗日作用量，其中T为系统动能。

拉格朗日最小作用量原理的数学形式为

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2}2T\,dt=\Delta A=0 \qquad (8\text{-}85)$$

其中Δ为全变分记号。拉格朗日原理(8-85)的条件是：

(1) 系统是完整、保守、稳定的；

(2) 可比较的运动具有同样的能量常数

$h=T+V$，它的变分为零，即 $\Delta h=0$;

(3) 在端点坐标的全变分应等于零：

$$(\Delta q_s)_{t=t_1}=0,\ (\Delta q_s)_{t=t_2}=0 \tag{8-86}$$

在上述三个条件下，拉格朗日原理(8-85)表明，对真实运动来说，拉格朗日作用量的全变分等于零。

现在我们来证明拉格朗日最小作用量原理与拉格朗日方程的等价性。

首先，由拉格朗日方程来推导拉格朗日原理。

完整保守系统的拉格朗日方程有形式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{8-87}$$

上式乘以 Δq_s 并对 s 求和，得

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)\cdot\Delta q_s-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\cdot\Delta q_s=0 \tag{8-88}$$

又

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)\Delta q_s=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\Delta q_s\right)-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{d\Delta q_s}{dt} \tag{8-89}$$

据(8-8)、(8-4)有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\Delta q_s)&=\frac{d}{dt}(\delta q_s)+\frac{d}{dt}(\dot{q}_s\Delta t)\\&=\delta\dot{q}_s+\ddot{q}_s\Delta t+\dot{q}_s\frac{d(\Delta t)}{dt}\\&=\Delta\dot{q}_s+\dot{q}_s\frac{d(\Delta t)}{dt}\end{aligned} \tag{8-90}$$

将(8-90)代入(8-89)，得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)\Delta q_s=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\Delta q_s\right)-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\Delta \dot{q}_s-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\frac{d(\Delta t)}{dt}$$

将此式代入(8-88)并交换$\sum$和$\frac{d}{dt}$，我们有

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\Delta q_s\right)=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\Delta q_s+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\Delta \dot{q}_s\right)+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\frac{d(\Delta t)}{dt} \tag{8-91}$$

但拉格朗日函数L是q_s和$\dot{q}_s$的函数，故

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\Delta q_s+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\Delta \dot{q}_s\right)=\Delta L$$

而 $$L=T-V=T-(h-T)=2T-h$$

故 $$\Delta L=\Delta(2T-h)=\Delta(2T)-\Delta h=\Delta(2T)$$

又因动能T是广义速度的齐二次式，所以

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s=2T$$

于是，(8-91)变为

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\Delta q_s\right)=\Delta(2T)+2T\frac{d(\Delta t)}{dt}$$

将上式两端同乘以dt并自t_1至t_2积分，得

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\Delta q_s\Big|_{t_1}^{t_2}=\int_{t_1}^{t_2}\Delta(2T)dt+\int_{t_1}^{t_2}2T\,d(\Delta t) \tag{8-92}$$

由条件(8-86)知，(8-92)的左边等于零；由公式(8-19)知，(8-92)的右边为$\Delta\int_{t_1}^{t_2}2T\,dt$，因此有

$$\Delta A=\Delta\int_{t_1}^{t_2}2T\,dt=0$$

于是推得拉格朗日最小作用量原理。

将上述步骤反过来，可由拉格朗日原理推得拉格朗日方程。

第八章　习　　题

8-1　试用茹尔当原理(8-25)推导尼尔森方程(6-15)。

8-2　试用高斯原理 (8-27) 推导完整系统的拉格朗日方程。

8-3　试用高斯原理(8-27)推导采诺夫方程

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_s}-3\frac{\partial T'}{\partial q_s}\right]=Q_s \quad (s=1,2,\cdots,n)$$

8-4　质点的动能$T=\frac{1}{2}m\dot{q}^2$，势能 $V=\frac{1}{2}cq^2$($m>0$，$c>0$)，试建立哈密顿作用量S的表达式，并利用运动微分方程 $\ddot{q}+\omega^2q=0\left(\omega^2=\frac{c}{m}\right)$来证明 $\delta S=0$。

8-5　试用哈密顿原理解题 4-8。

8-6　试用哈密顿原理解题 4-11。

8-7　利用哈密顿原理证明具有拉格朗日函数 $L(q_s, \dot{q}_s, t)$的和具有与之相差一个任意函数 $\phi(q_s, t)$的全导数的拉格朗日函数$L_1(q_s, \dot{q}_s, t)=L(q_s, \dot{q}_s, t)+\frac{d}{dt}\phi(q_s, t)$ 的系统运动方程是一致的。

8-8　质点可在光滑铅垂平面 XZ 内运动，而平面以等角速度ω绕Z轴转动，试证在真实运动 $x(t)$，$z(t)$上的哈密

顿作用量 S 和比较运动 $x(t)+\delta x(t)$，$z(t)+\delta z(t)$ 上的哈密顿作用量 S'，当 $\delta x(0)=\delta x(T')=\delta z(0)=\delta z(T)=0$ 时，其关系可表示为

$$S'=S+\frac{1}{2}\int_0^T[(\delta\dot{x})^2+\omega^2(\delta x)^2+(\delta\dot{z})^2]\,dt$$

8-9　频率为 ω 的一维谐振子 $\left(T=\frac{1}{2}\dot{q}^2,\ V=\frac{1}{2}\omega^2q^2\right)$ 在 $t=0$ 时从位置 q_0 上无初速地开始运动。试计算振动周期 τ 内这一运动的哈密顿作用量 S。同时计算时间 τ 内形式为 $q(t)=\alpha t(t-\tau)+q_0$ 的比较运动上的作用量 S'。试证存在这样一些参数 α，使得(1)$S'>S$；(2)$S'=S$；(3)$S'<S$。

8-10　已知物体下落的运动微分方程为

$$m\ddot{y}=-mg,\qquad m\ddot{x}=0$$

运动的初始条件为 $t=0$：$x=x_0$，$y=y_0$；$\dot{x}=\dot{x}_0$，$\dot{y}=\dot{y}_0$，在哈密顿作用量中取 $t_1=0$，$t_2=t$，试证

$$S=m\Big[\frac{1}{2t}(x-x_0)^2+\frac{1}{2t}(y-y_0)^2$$

$$-\frac{1}{2}gt(y+y_0)-\frac{1}{24}g^2t^3\Big]$$

并证明此 S 满足哈密顿——雅科比方程

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right]+mgy=0$$

8-11　试用拉格朗日最小作用量原理解下述问题：质量为 m_1 及 m_2 的两个砝码用不可伸长的无重量的绳子联结，绳子跨过质量为 M 的定滑轮（当作匀质圆盘）。求砝码的加速度。

答： $\ddot{x}=\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2+\dfrac{1}{2}M}g$

8-12　一半径为 a 的均匀小球，自半径为 b 的固定圆球顶端自由滚下，试用拉格朗日最小作用量原理求小球球心的加速度。

答：$\dfrac{5}{7}g\sin\theta$（θ 为两球心联线与铅垂线夹角）

第九章　非完整系统力学初步*

1788年拉格朗日发表了名著《分析力学》，从而奠定了分析力学的基础。但是，在拉格朗日时代还不知道有独立坐标数目与坐标的独立变分数目不相同的系统——非完整约束系统的存在。直到1894年德国学者赫兹（Hertz）才第一次把约束和力学系统分成完整的和非完整的两大类，从此开辟了非完整系统力学的新领域。

研究非完整系统力学有重要的理论价值和实际意义。冰刀运动时，它与冰面相接触的点的速度方向被限制在冰刀平面与冰面的交线上，这是一个非完整约束条件。这一问题称为查浦雷金——卡拉提奥多里（Чаплыгин—Carathéodory）问题，是在1898—1933年完成的。就连这个简单模型都有它的应用价值，例如，在求积仪中就用一种边缘锋利的刀轮。凡是带有滚动轮子的系统几乎都是非完整系统，因此非完整系统力学用于研究自行车、摩托车、火车车厢和飞机起落架等的运动。非完整系统力学也应用于研究电机的一般理论，应用于研究流体机和飞机，应用于研究一般链式系统等。

因为非完整力学系统具有不可积分的微分约束，通常的第二类拉格朗日方程已经不能应用，而需要用更复杂的微分方程来描述。在上一世纪末和本世纪初的20年间，是研究非完整系统力学的一个高潮时期，建立了一阶线性非完整约束的各种形式的方程。但是，因为非完整系统比起完整系统来

要复杂得多，困难得多，因此许多问题的研究与讨论一直延续到今天。

在这一章里，我们介绍一些非完整系统的例子以及几种运动微分方程。

第一节　非完整系统的例子

非完整约束和非完整系统并不是什么奇怪的、不可思议的东西，几乎所有保持无滑动地滚动的系统都存在非完整约束。

例1.　查浦雷金——卡拉提奥多里问题

假设物体 A 可沿固定平面 Π 滑动，物体与平面有三个点相接触，其中两个接触点可无摩擦地沿平面自由地在任何方向上滑动，第三个接触点是刀片或者带尖缘的小轮对平面的支点，并且这个点 P 仅能沿刀片或小轮的尖缘而移动(图9-1)。

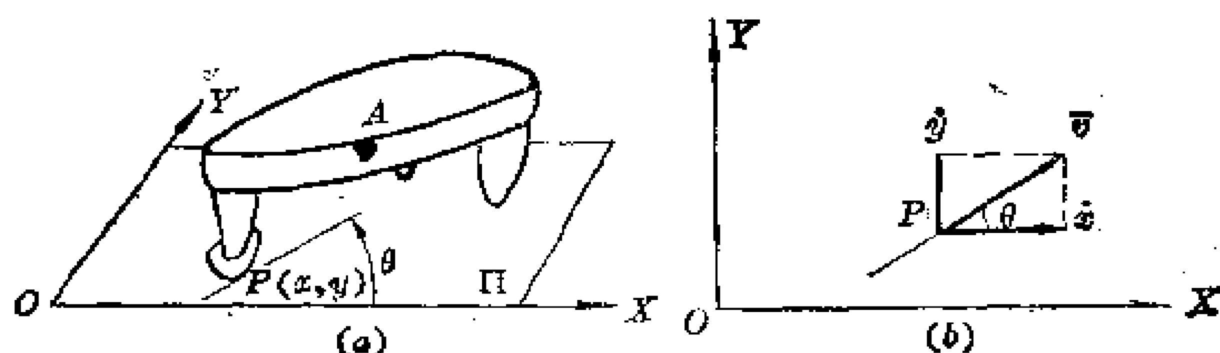


图 9-1

物体 A 在平面 Π 上的位置可由刀片接触点 P 的坐标 x，y 以及刀片方向与平面上固定方向 OX 的夹角 θ 来确定。限制点 P 的速度仅能沿刀片的方向的条件表为

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\operatorname{tg}\theta$$

或者

$$\dot{x}\sin\theta-\dot{y}\cos\theta=0 \tag{9-1}$$

显然，(9-1)是不可积分的约束方程，即为非完整约束，而且是双面、线性、齐次、稳定的非完整约束。不论作用于系统上的力和运动的初始条件如何，这个关系必须得到满足。系统的独立坐标的数目是三，非完整约束数目是一，故系统有两个自由度。

例2. 沿粗糙水平面作纯滚动的圆球

为确定球的运动，我们选五个参数：球心C的坐标(x,y)以及三个欧拉角ψ，θ，φ(图 9-2)。圆球沿水平面无滑动地滚动，故它与平面的接触点P的速度必须为零。我们来列写这个约束方程。

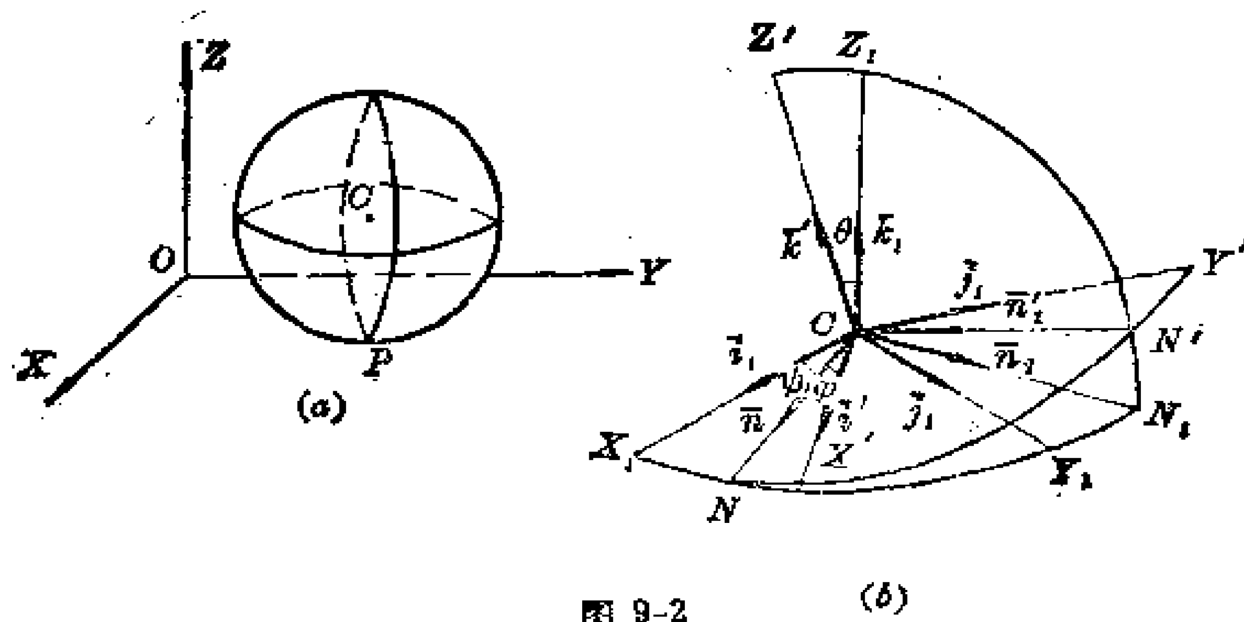


图 9-2

设 $\boldsymbol{v}_C$ 为球心的速度矢量，$\boldsymbol{\omega}$ 为球的角速度矢量，$\boldsymbol{r}$ 为C至P的矢径，$\boldsymbol{v}_P$ 为接触点处的速度矢量，则有

$$\boldsymbol{v}_P=\boldsymbol{v}_c+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{9-2}$$

将上式诸矢量投影到与空间固定坐标系 $OXYZ$ 相平行的坐标系 $CX_1Y_1Z_1$ 上，即

$$\boldsymbol{v}_c=\dot{x}\boldsymbol{i}_1+\dot{y}\boldsymbol{j}_1$$

$$\boldsymbol{\omega}=(\dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta+\dot{\theta}\cos\psi)\boldsymbol{i}_1+(-\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta+\dot{\theta}\sin\psi)\boldsymbol{j}_1+(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)\boldsymbol{k}_1$$

$$\boldsymbol{r}=-a\boldsymbol{k}_1$$

其中 $\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{j}_1,\boldsymbol{k}_1$ 为固定轴向单位矢量，a 为球的半径。

球沿水平面的纯滚动条件为

$$\boldsymbol{v}_P=0$$

即

$$\dot{x}\boldsymbol{i}_1+\dot{y}\boldsymbol{j}_1+[(\dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta+\dot{\theta}\cos\psi)\boldsymbol{i}_1+(-\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta+\dot{\theta}\sin\psi)\boldsymbol{j}_1+(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)\boldsymbol{k}_1]\times(-a\boldsymbol{k}_1)=0$$

于是，我们得到

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}+a(\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta-\dot{\theta}\sin\psi)=0\\ \dot{y}+a(\dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta+\dot{\theta}\cos\psi)=0\end{aligned}\right\} \tag{9-3}$$

这是两个线性齐次稳定的非完整约束条件，因此，系统有三个自由度。

例3. 沿水平面滚动的圆盘

圆盘的位置由五个参数确定：圆盘中心的两个坐标(x,y)以及三个欧拉角ψ,θ,φ（图 9-3）。而圆盘半径为a，中心的铅垂坐标为 $z=a\sin\theta$。

因圆盘沿粗糙水平面无滑动地滚动，故它与平面的接触点P处的速度为零。令 $\boldsymbol{v}_c$ 为圆盘中心的速度矢量，$\boldsymbol{\omega}$ 为圆盘的角速度矢量，$\boldsymbol{r}$ 为C至P的矢径，$\boldsymbol{v}_P$ 为接触点处的速度矢量，则圆盘纯滚动的条件为

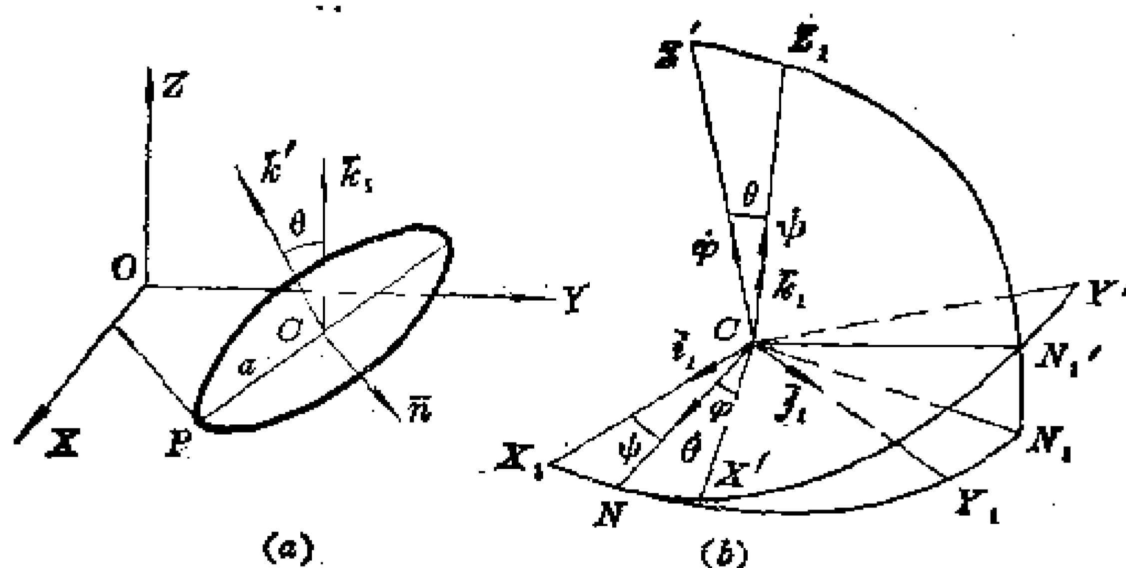


图 9-3

$$\boldsymbol{v}_P=\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=0 \tag{9-4}$$

现将上式各矢量投影到与空间固定坐标系 $OXYZ$ 相平行的坐标系 $CX_1Y_1Z_1$ 上，则

$$\boldsymbol{v}_C=\dot{x}\boldsymbol{i}_1+\dot{y}\boldsymbol{j}_1+\dot{z}\boldsymbol{k}_1$$

$$\boldsymbol{\omega}=(\dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta+\dot{\theta}\cos\psi)\boldsymbol{i}_1+(-\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta+\dot{\theta}\sin\psi)\boldsymbol{j}_1 \\ +(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)\boldsymbol{k}_1$$

$$\boldsymbol{r}=-a\boldsymbol{n}'=-a(\boldsymbol{k}_1\sin\theta+\boldsymbol{j}_1\cos\psi\cos\theta-\boldsymbol{i}_1\sin\psi\cos\theta)$$

于是(9-4)为

$$\dot{x}\boldsymbol{i}_1+\dot{y}\boldsymbol{j}_1+\dot{z}\boldsymbol{k}_1+[(\dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta+\dot{\theta}\cos\psi)\boldsymbol{i}_1 \\ +(-\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta+\dot{\theta}\sin\psi)\boldsymbol{j}_1+(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)\boldsymbol{k}_1] \\ \times a(\boldsymbol{i}_1\sin\psi\cos\theta-\boldsymbol{j}_1\cos\psi\cos\theta-\boldsymbol{k}_1\sin\theta)=0$$

即

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}+a(\dot{\psi}\cos\psi\cos\theta-\dot{\theta}\sin\psi\sin\theta+\dot{\varphi}\cos\psi)=0\\&\dot{y}+a(\dot{\psi}\sin\psi\cos\theta+\dot{\theta}\cos\psi\sin\theta+\dot{\varphi}\sin\psi)=0\\&\dot{z}-a\dot{\theta}\cos\theta=0\end{aligned}\right\} \tag{9-5}$$

其中第三个方程是一个完整约束，前两个是非完整约束，系统有三个自由度。

例4. 由三个粗糙匀质圆柱所组成的系统，其中两个半径为 r 的同样圆柱沿水平面滚动，第三个半径为 R 的圆柱在这两个圆柱上面滚动（图 9-4）。

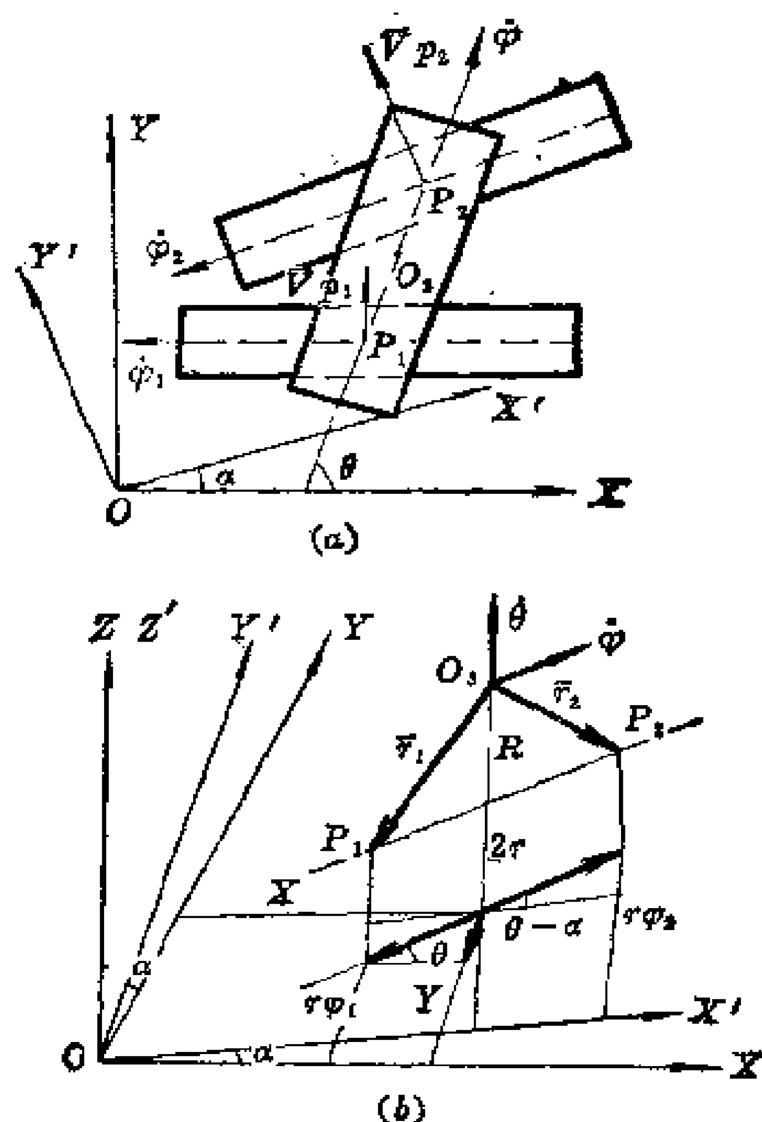


图 9-4

如图示，我们引进两个固定坐标系 $OXYZ$ 及 $OX'Y'Z'$，它们的轴 OX 及 OX' 分别平行于下面两圆柱的母线，两母

线夹角为 α。取广义坐标如下：

x, y ——上圆柱质心的两水平坐标

θ ——上圆柱母线与轴 OX 的夹角

φ ——上圆柱的转角

φ_1, φ_2 ——下面两圆柱的转角

上圆柱相对下面两圆柱无滑动地滚动条件为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_{03}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{v}_{P1} \\ \boldsymbol{v}_{03}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{v}_{P2} \end{aligned}\right\} \tag{9-6}$$

其中

$\boldsymbol{v}_{03}$——上圆柱质心的速度

$\boldsymbol{\omega}$——上圆柱的瞬时角速度

$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$——由上圆柱质心 O_3 向两接触点 P_1，P_2 引出的矢径

$\boldsymbol{v}_{P1}, \boldsymbol{v}_{P2}$——下圆柱在接触点 P_1, P_2 处的速度

现将(9-6)中的各矢量在固定轴系 $OXYZ$ 上投影，有

$$\boldsymbol{v}_{03}=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{i}+\varphi\sin\theta\boldsymbol{j}+\dot{\theta}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}_1=-(y-r\varphi_1)\boldsymbol{j}-(y-r\varphi_1)\operatorname{ctg}\theta\boldsymbol{i}-R\boldsymbol{k}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_2&=[r\varphi_2-(y\cos\alpha-x\sin\alpha)]\boldsymbol{j}'+[r\varphi_2-(y\cos\alpha\\&\quad-x\sin\alpha)]\operatorname{ctg}(\theta-\alpha)\boldsymbol{i}'-R\boldsymbol{k}'=(r\varphi_2+x\sin\alpha\\&\quad-y\cos\alpha)\frac{\cos\theta}{\sin(\theta-\alpha)}\boldsymbol{i}+(r\varphi_2+x\sin\alpha\\&\quad-y\cos\alpha)\frac{\sin\theta}{\sin(\theta-\alpha)}\boldsymbol{j}-R\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{v}_{P1}=2r\dot{\varphi}_1\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}_{P2}=-2r\dot{\varphi}_2\sin\alpha\boldsymbol{i}+2r\dot{\varphi}_2\cos\alpha\boldsymbol{j}$$

注意，在计算 φ_1,φ_2 时，认为开始时两圆柱与平面 XOY 的交线分别在轴 OX 与轴 OX' 的方向。将这些表达式代入(9-6)，并简化得

$$
\left.\begin{aligned}
&\dot{x}-R\dot{\varphi}\sin\theta-\dot{\theta}(r\varphi_1-y)=0\\
&\dot{y}+R\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\theta}(r\varphi_1-y)\operatorname{ctg}\theta-2r\dot{\varphi}_1=0\\
&\dot{x}\sin(\theta-\alpha)-R\dot{\varphi}\sin\theta\sin(\theta-\alpha)-\dot{\theta}(r\varphi_2+x\sin\alpha\\
&\qquad -y\cos\alpha)\sin\theta+2r\dot{\varphi}_2\sin\alpha\sin(\theta-\alpha)=0\\
&\dot{y}\cos(\theta-\alpha)+R\dot{\varphi}\cos\theta\sin(\theta-\alpha)+\dot{\theta}(r\varphi_2+x\sin\alpha\\
&\qquad -y\cos\alpha)\cos\theta-2r\dot{\varphi}_2\cos\alpha\sin(\theta-\alpha)=0
\end{aligned}\right\}
\tag{9-7}
$$

关系 (9-7) 是 4 个线性齐次稳定的非完整约束方程，因此系统有两个自由度。

例5． 平面上有两质点 m_1 及 m_2，系统运动时 m_1 对 m_2 进行追踪——纯微分追踪，m_1 的速度始终对准 m_2（狗追兔子问题）。

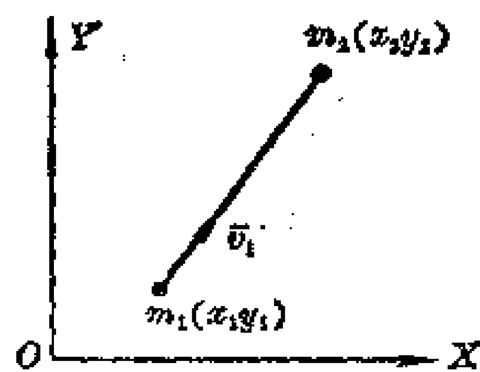


图 9-5

取 m_1 的坐标 x_1, y_1, m_2 的坐标 x_2, y_2 为广义坐标（图 9-5）。要求 m_1 对 m_2 进行追踪，即点 m_1 的速度应在 m_1 和 m_2 两点联线方向并且指向 m_2。这一条件表为

$$\frac{\dot{y}_1}{\dot{x}_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \tag{9-8}$$

条件 (9-8) 是一个非完整约束条件，因此系统有三个自由度。

例6. 一质量为m的质点，受有速度大小为常数的约束，在牛顿中心引力场中的运动。

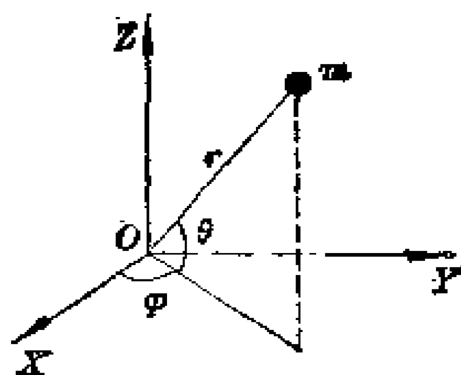


图 9-6

我们取球坐标r，φ，θ为广义坐标（图 9-6），则

$$x=r\cos\theta\cos\varphi$$
$$y=r\cos\theta\sin\varphi$$
$$z=r\sin\theta$$

因此

$$\dot{x}=\dot{r}\cos\theta\cos\varphi-r\dot{\theta}\sin\theta\cos\varphi-r\dot{\varphi}\cos\theta\sin\varphi$$
$$\dot{y}=\dot{r}\cos\theta\sin\varphi-r\dot{\theta}\sin\theta\sin\varphi+r\dot{\varphi}\cos\theta\cos\varphi$$
$$\dot{z}=\dot{r}\sin\theta+r\dot{\theta}\cos\theta$$

质点速度的平方为

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\theta$$

故质点速度大小为常数的约束可写成

$$\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\theta=C^2=const \tag{9-9}$$

关系（9-9）是一个非线性非完整约束条件。这一问题的实际意义可想象为保持速度大小为常数的某飞行器在地球附近的飞行运动。

例7. 一质量为m的质点，受有二阶非线性非完整约束

$$\ddot{q}_3=\ddot{q}_1\ddot{q}_2 \tag{9-10}$$

其中q_1, q_2, q_3为点的坐标。

从以上七例可见，非完整约束有一阶线性的（例1，2，3，4，5），一阶非线性的（例6）二阶非线性的（例7）等等。非完整约束有的是限制速度方向的（例1，5），有的是限制速度大小的（例6），有的是属于纯滚动的（例2，3，4）等等。

第二节　一阶非线性非完整约束加在虚位移上的条件

在第一章我们研究了完整约束和线性非完整约束加在虚位移上的条件(1-43)和(1-49)，那里实际上给出了一个所谓"霍尔德(Hölder)原则"。这原则就是把完整约束和线性非完整约束方程写成微分形式，以符号 δ（变分）代替符号 d（微分）并取 $\delta t=0$，便得约束加在虚位移上的条件。但是对于一阶非线性非完整约束来说，这个原则将给出坐标变分之间的非线性关系。例如，质点受有速度大小为常数的一阶非线性非完整约束

$$\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2=C^2=const$$

将其写成微分形式

$$(dq_1)^2+(dq_2)^2+(dq_3)^2=C^2(dt)^2$$

按霍尔德原则，约束加在虚位移上的条件成为

$$(\delta q_1)^2+(\delta q_2)^2+(\delta q_3)^2=0$$

其中虚位移 $\delta q_1,\delta q_2,\delta q_3$ 以非线性出现。因此利用达朗伯——拉格朗日原理来推导系统运动微分方程时出现了困难，因为这个原理中的 δq_s 是线性地出现的。

因此，对于一阶非线性非完整约束加在虚位移上的条件的研究，必须另创新路。下面介绍两种办法。

(1) 线性化方法

设一阶非线性非完整约束有形式(1-10)，即

$$\varphi_\beta(x_1,y_1,z_1,\cdots,x_N,y_N,z_N,\dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{z}_1,\cdots,\dot{x}_N,\dot{y}_N,\dot{z}_N,t)=0\quad(\beta=1,2,\cdots,g<3N)\qquad(9\text{-}11)$$

则虚位移 $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \cdots, \delta x_N, \delta y_N, \delta z_N$ 应满足关系

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i+\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \dot{y}_i}\delta y_i+\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \dot{z}_i}\delta z_i\right)=0 \qquad (9\text{-}12)$$

这就是虚位移的切塔耶夫(Четаев)定义(1933年)。切塔耶夫定义给出了虚位移的线性关系，因此可由此定义用达朗伯——拉格朗日原理来推导一阶非线性非完整约束的运动微分方程。

切塔耶夫定义对约束是完整的和一阶线性非完整的情形自然成立。实际上，如约束是完整的，有形式

$$F_\alpha(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_N, y_N, z_N, t)=0 \quad (\alpha=1,2,\cdots,l<3N) \qquad (9\text{-}13)$$

我们将(9-13)对时间 t 求全导数，则有

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}\dot{x}_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial y_i}\dot{y}_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial z_i}\dot{z}_i\right)+\frac{\partial F_\alpha}{\partial t}=0 \qquad (9\text{-}14)$$

利用切塔耶夫定义(9-12)，便有

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0$$

$$(\alpha=1,2,\cdots,l) \qquad (9\text{-}15)$$

这与(1-43)一样。而如果约束是一阶线性非完整的，其方程为

$$\sum_{i=1}^{N}(a_{\beta i}\dot{x}_i+b_{\beta i}\dot{y}_i+c_{\beta i}\dot{z}_i)+d_\beta=0 \quad (\beta=1,2,\cdots,g) \qquad (9\text{-}16)$$

按切塔耶夫定义(9-12)，这时约束加在虚位移上的条件为

$$\sum_{i=1}^{N}(a_{\beta i}\delta x_i+b_{\beta i}\delta y_i+c_{\beta i}\delta z_i)=0 \quad (\beta=1,2,\cdots,g) \qquad (9\text{-}17)$$

这与(1-49)一样。

如果一阶非线性非完整约束方程用广义坐标、广义速度表出，如(1-37)，即

$$\varphi_\beta(q_1,q_2,\cdots,q_n,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_n,t)=0 \qquad (9\text{-}18)$$

则切塔耶夫定义给出

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s=0 \quad (\beta=1,2,\cdots,g) \qquad (9\text{-}19)$$

(2) 虚位移的新定义方法

这个方法认为虚位移是发生在速度空间的，即系统中点的坐标和加速度不改变，仅速度发生变化，故称为“速度空间的虚位移”。这个新概念是1964年由山东工学院牛青萍明确提出的(《力学学报》第7卷第2期，1964年)。

如果系统受有一阶非线性非完整约束(9-11)，因为这实际上是对系统中点的速度的限制，因此令其中的$t,x_1,y_1,z_1,\cdots,x_N,y_N,z_N$不变，仅改变$\dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{z}_1,\cdots,\dot{x}_N,\dot{y}_N,\dot{z}_N$，其改变量为$\delta\dot{x}_1,\delta\dot{y}_1,\delta\dot{z}_1,\cdots,\delta\dot{x}_N,\delta\dot{y}_N,\delta\dot{z}_N$。根据虚位移的原始定义知道，改变之后仍满足约束方程，于是有

$$\Phi_\beta(x_1,y_1,z_1,\cdots,x_N,y_N,z_N,\dot{x}_1+\delta\dot{x}_1,\dot{y}_1+\delta\dot{y}_1,\dot{z}_1+\delta\dot{z}_1,\cdots,\dot{x}_N+\delta\dot{x}_N,\dot{y}_N+\delta\dot{y}_N,\dot{z}_N+\delta\dot{z}_N,t)=0 \quad (9\text{-}20)$$

因此

$$\Phi_\beta(x_1,\cdots,z_N,\dot{x}_1+\delta\dot{x}_1,\cdots,\dot{z}_N+\delta\dot{z}_N,t)-\Phi_\beta(x_1,\cdots,z_N,\dot{x}_1,\cdots,\dot{z}_N,t)=0$$

将上式展成泰勒级数，并忽略高阶小量，则

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\dot{x}_i}\delta\dot{x}_i+\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\dot{y}_i}\delta\dot{y}_i+\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\dot{z}_i}\delta\dot{z}_i\right)=0 \quad (9\text{-}21)$$

这就是速度空间的虚位移$\delta\dot{x}_i,\delta\dot{y}_i,\delta\dot{z}_i$所满足的关系。

对于形如(9-18)的约束，按速度空间的虚位移定义，有

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_s}\delta\dot{q}_s=0\quad(\beta=1,2,\cdots,g)\tag{9-22}$$

“速度空间的虚位移”定义(9-21)、(9-22)与切塔耶夫定义(9-12)、(9-19)的差别仅在于虚位移的意义，前者是速度的变分，后者是坐标的变分。

由“速度空间的虚位移”定义，利用茹尔当原理(8-25)可以推导一阶非线性非完整约束系统的运动微分方程。

第三节　一阶非线性非完整约束下实位移处于虚位移中的充要条件

第一章第三节中我们已经说明，在完整稳定约束下实位移是虚位移中的一个，在完整不稳定约束下实位移不是虚位移中的一个。在线性非完整约束下，如果约束方程对于速度是齐次的，则实位移处于无数虚位移之中；如果约束方程对于速度是非齐次的，则实位移不与任何一个虚位移重合。这一节里，我们研究一阶非线性非完整约束下实位移处于无数虚位移中的充分必要条件，而完整约束情形及线性非完整约束情形只是它的特殊情形。

1. **一阶非线性非完整约束下实位移处于虚位移中的充要条件**

设系统所受约束为(9-11)，即

$$\Phi_\beta(x_i,y_i,z_i,\dot{x}_i,\dot{y}_i,\dot{z}_i,t)=0\quad(i=1,2,\cdots,N;\ \beta=1,2,\cdots,g)\tag{9-23}$$

按虚位移的切塔耶夫定义，约束(9-23)加在虚位移 $\delta x_1,\cdots,\delta z_N$ 上的条件为(9-12)，即

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\dot{x}_i}\delta x_i+\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\dot{y}_i}\delta y_i+\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\dot{z}_i}\delta z_i\right)=0\quad(\beta=1,2,\cdots,g)\tag{9-24}$$

如果(9-23)满足条件

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\dot{x}_i}\dot{x}_i+\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\dot{y}_i}\dot{y}_i+\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\dot{z}_i}\dot{z}_i\right)=0\quad(\beta=1,2,\cdots,g)\tag{9-25}$$

则实位移 dx_i,dy_i,dz_i 满足方程

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\dot{x}_i}dx_i+\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\dot{y}_i}dy_i+\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\dot{z}_i}dz_i\right)=0\quad(\beta=1,2,\cdots,g)\tag{9-26}$$

比较(9-26)与(9-24)得知，实位移处于无数虚位移之中。

反之，如果实位移处于虚位移之中，则条件(9-25)得以满足。

因此，条件(9-25)是一阶非线性非完整约束下实位移处于虚位移中的充分必要条件。

条件(9-25)在约束方程对速度 $\dot{x}_i$，$\dot{y}_i$，$\dot{z}_i$ 为齐次的情形是成立的，因为由齐次函数的欧拉定理，有

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\dot{x}_i}\dot{x}_i+\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\dot{y}_i}\dot{y}_i+\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\dot{z}_i}\dot{z}_i\right)=k_\beta\Phi_\beta(x_i,y_i,z_i,\dot{x}_i,\dot{y}_i,\dot{z}_i,t)\tag{9-27}$$

其中 k_β 为 Φ_β 的齐次性阶数。　由(9-23)知，(9-27)显然为零。

我们以著名的阿沛尔例来检验上述的充要条件。在阿沛尔例中，约束方程为

$$\dot{z}=\frac{b}{a}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\tag{9-28}$$

将(9-28)写成

$$\Phi=\dot{z}-\frac{b}{a}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=0 \qquad (9\text{-}29)$$

我们有

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}}\dot{x}+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{y}}\dot{y}+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{z}}\dot{z}=-\frac{b}{a}\frac{\dot{x}^2}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}-\frac{b}{a}\frac{\dot{y}^2}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$$

$$+\dot{z}=-\frac{b}{a}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}+\dot{z}=\Phi=0$$

因此条件(9-25)得以满足。按虚位移的切塔耶夫定义，有

$$-\frac{b}{a}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\delta x-\frac{b}{a}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\delta y+\delta z=0 \qquad (9\text{-}30)$$

由(9-29)知道，实位移 dx,dy,dz 满足方程

$$dz-\frac{b}{a}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=0$$

或

$$dz-\frac{b}{a}\frac{\dot{x}dx+\dot{y}dy}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}=0 \qquad (9\text{-}31)$$

比较(9-31)与(9-30)，可见实位移处于虚位移之中。

2. 线性非完整约束下实位移处于虚位移之中的充要条件

上述充要条件，对于线性齐次非完整约束自然成立。设系统所受约束为

$$\Phi_\beta=\sum_{i=1}^{N}(a_{\beta i}\dot{x}_i+b_{\beta i}\dot{y}_i+c_{\beta i}\dot{z}_i)=0 \quad (\beta=1,2,\cdots,g) \qquad (9\text{-}32)$$

其中 $a_{\beta i},b_{\beta i},c_{\beta i}$ 为坐标和时间的函数。将条件(9-25)应用于(9-32)，则仍有

$$\sum_{i=1}^{N}(a_{\beta i}\dot{x}_i+b_{\beta i}\dot{y}_i+c_{\beta i}\dot{z}_i)=0 \quad (\beta=1,2,\cdots,g)$$

如果系统所受约束是线性非齐次的，即

$$\Phi_\beta=\sum_{i=1}^{N}(a_{\beta i}\dot{x}_i+b_{\beta i}\dot{y}_i+c_{\beta i}\dot{z}_i)+d_\beta=0$$

$$(\beta=1,2,\cdots,g) \tag{9-33}$$

则
$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\dot{x}_i}\dot{x}_i+\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\dot{y}_i}\dot{y}_i+\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\dot{z}_i}\dot{z}_i\right)=\sum_{i=1}^{N}(a_{\beta i}\dot{x}_i+b_{\beta i}\dot{y}_i+c_{\beta i}\dot{z}_i)=-d_\beta\neq0 \tag{9-34}$$

于是我们由(9-25)得到结论：在线性非完整约束下实位移处于虚位移中的充要条件是约束方程对速度的齐次性。

3. 完整约束下实位移处于虚位移中的充要条件

我们研究一般的完整约束

$$F_\alpha(x_i,y_i,z_i,t)=0\ (\alpha=1,2,\cdots,l,i=1,2,\cdots,N) \tag{9-35}$$

将(9-35)对时间 t 求导数，得到

$$\Phi_\alpha=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}\dot{x}_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial y_i}\dot{y}_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial z_i}\dot{z}_i\right)+\frac{\partial F_\alpha}{\partial t}=0$$

$$(\alpha=1,2,\cdots,l) \tag{9-36}$$

应用条件(9-25)，我们有

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial\dot{x}_i}\dot{x}_i+\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial\dot{y}_i}\dot{y}_i+\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial\dot{z}_i}\dot{z}_i\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}\dot{x}_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial y_i}\dot{y}_i+\frac{\partial F_\alpha}{\partial z_i}\dot{z}_i\right)=-\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} \tag{9-37}$$

因此，当$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t}=0$时，条件(9-25)满足；当$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t}\neq0$时，条件(9-25)不满足。

于是我们由(9-25)得出结论：在完整约束下实位移处于虚位移中的充要条件是约束方程不包含时间 t。

第四节　非完整系统分析力学的运动微分方程

第二类拉格朗日方程是整个完整系统分析力学的基础，它是由达朗伯——拉格朗日原理(4-3)出发，利用两个经典拉格朗日关系(4-8)及(4-11)得到广义坐标下的达朗伯——拉格朗日原理(4-19)，并由 δq_s 的彼此独立性而得到的。但是，因为非完整系统具有不可积分的微分约束，而(4-19)中的 δq_s 不完全独立，因此不能得到第二类拉格朗日方程。

第八章所研究的基本微分变分原理——达朗伯——拉格朗日原理、茹尔当原理以及高斯原理，可以应用于任何系统，不论完整的还是非完整的。因此，这些原理是推导非完整系统分析力学基本运动微分方程的依据。

下面我们简单介绍非完整系统的罗兹(Routh)方程，查浦雷金(Чаплыгин)方程，阿沛尔(Appell)方程及广义尼尔森方程。

第五节　罗兹方程

设力学系统受有 l 个完整约束

$$F_\alpha(x_1,y_1,z_1,\cdots,x_N,y_N,z_N,t)=0 \quad (\alpha=1,2,\cdots,l) \tag{9-38}$$

及 g 个线性非完整约束

$$\sum_{i=1}^{N}(a_{\beta i}dx_i+b_{\beta i}dy_i+c_{\beta i}dz_i)+d_\beta dt=0 \quad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{9-39}$$

我们选 n 个独立的广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$，$n=3N-l$，则(9-38)自动满足。我们将(9-39)表为广义坐标、广义速度的形式。

因

$$dx_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}dq_s+\frac{\partial x_i}{\partial t}dt$$

$$dy_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}dq_s+\frac{\partial y_i}{\partial t}dt$$

$$dz_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}dq_s+\frac{\partial z_i}{\partial t}dt$$

将上式代入(9-39)，并令

$$A_{\beta s}=\sum_{i=1}^{N}\left(a_{\beta i}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+b_{\beta i}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+c_{\beta i}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)$$

$$A_{\beta}=\sum_{i=1}^{N}\left(a_{\beta i}\frac{\partial x_i}{\partial t}+b_{\beta i}\frac{\partial y_i}{\partial t}+c_{\beta i}\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)+d_{\beta}$$

便得广义坐标、广义速度下的非完整约束方程

$$\sum_{s=1}^{n}A_{\beta s}dq_s+A_{\beta}dt=0\quad(\beta=1,2,\cdots,g)\qquad(9\text{-}40)$$

按霍尔德原则，约束加在虚位移上的条件为

$$\sum_{s=1}^{n}A_{\beta s}\delta q_s=0\quad(\beta=1,2,\cdots,g)\qquad(9\text{-}41)$$

如果开始不计非完整约束，那么达朗伯——拉格朗日原理可写成广义坐标形式(4-19)，即

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{Q_s-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\partial T}{\partial q_s}\right\}\delta q_s=0\quad(9\text{-}42)$$

由于有 g 个非完整约束(9-40)，上式中的 δq_s 不完全独立，因此不能得到第二类拉格朗日方程。

现在，我们引入 g 个不定乘子 $\lambda_\beta(\beta=1,2,\cdots,g)$，将(9-41)乘上 λ_β 并对 β 求和，得

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta A_{\beta s}\right)\delta q_s=0 \tag{9-43}$$

将(9-43)与(9-42)相加，得

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{Q_s-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\partial T}{\partial q_s}+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta A_{\beta s}\right\}\delta q_s=0 \tag{9-44}$$

我们这样来选不定乘子 λ_β 的值，使方程(9-44)中不独立的变分 $\delta q_{\varepsilon+1},\delta q_{\varepsilon+2},\cdots,\delta q_n$ $(\varepsilon=n-g)$ 前的括号中的表达式为零，即

$$Q_{\varepsilon+\gamma}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\gamma}}+\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta A_{\beta,\varepsilon+\gamma}=0$$

$$(\gamma=1,2,\cdots,g) \tag{9-45}$$

因此时(9-44)中 $\delta q_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon)$ 是独立的，故这些变分前的系数为零，有

$$Q_\sigma-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}+\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta A_{\beta,\sigma}=0 \quad (\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{9-46}$$

联合(9-45)及(9-46)便得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta A_{\beta s} \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{9-47}$$

方程(9-47)就是一阶线性非完整约束系统的罗兹方程。它联同约束方程(9-40)便可求解 $n+g$ 个未知量 $q_1,q_2,\cdots,q_n,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_g$。

罗兹方程实际上是普通的不定乘子法与第二类拉格朗日方程相结合的产物。因方程含有不定乘子 λ_β 而增添了未知

量，方程的数目比系统的自由度数目多了 $n-(n-g)=g$ 个，因此对复杂系统应用起来不大方便。但是，这方程的物理意义比较明显，方程（9-47）右边的带不定乘子 λ_β 的项实际上就是约束反力，因此 λ_β 亦称为约束乘子。利用罗兹方程不仅可求运动，而且还可求一部分约束反力。

下面我们将罗兹方程(9-47)推广到一阶非线性非完整约束系统。

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 来确定，并受有形如(9-18)的 g 个一阶非线性非完整约束。利用切塔耶夫定义，约束加在坐标变分上的条件为(9-19)，即

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s = 0 \quad (\beta = 1, 2, \cdots, g) \tag{9-48}$$

由此而得到方程(9-47)的类似结论，我们得到一阶非线性非完整约束系统的罗兹方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s + \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_s} \quad (s = 1, 2, \cdots, n) \tag{9-49}$$

方程（9-49）由苏联诺沃谢洛夫（В.С.Новоселов）1957年得到[36]。

方程(9-49)也可由“速度空间的虚位移”定义，利用茹尔当原理(8-25)来推导。

例题

例1. Чаплыгин-Carathéodory（查浦雷金——卡拉提奥多里）问题。

解： 如第一节中例1。设物体 A 的质量为 m，它对过质心 C 的铅垂轴的转动惯量为 J_c，质心 C 在平面上的投影 C_0

在刀片方向上，且 $C_0P=a$（图 9-7）。取 x、y、θ 为广义坐标，则非完整约束条件为(9-1)，即

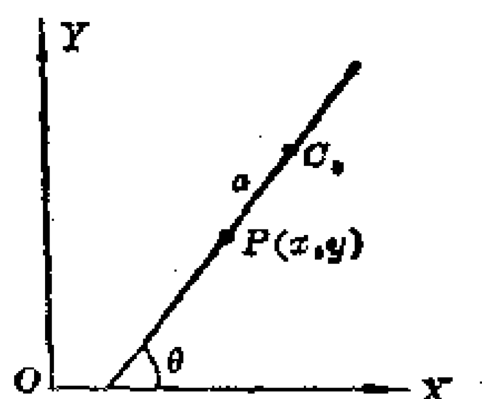


图 9-7

$$\dot{x}\sin\theta-\dot{y}\cos\theta=0 \tag{9-50}$$

质心 C 的速度分量为

$$\dot{x}-a\dot{\theta}\sin\theta,\qquad \dot{y}+a\dot{\theta}\cos\theta$$

当不计非完整约束时，系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}J_C\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m[(\dot{x}-a\dot{\theta}\sin\theta)^2+(\dot{y}+a\dot{\theta}\cos\theta)^2] \tag{9-51}$$

选取一个不定乘子 λ，则罗兹方程(9-47)给出

$$\left.\begin{aligned}
&m\frac{d}{dt}(\dot{x}-a\dot{\theta}\sin\theta)=\lambda\sin\theta+X\\
&m\frac{d}{dt}(\dot{y}+a\dot{\theta}\cos\theta)=-\lambda\cos\theta+Y\\
&J_C\ddot{\theta}+m\frac{d}{dt}[(\dot{x}-a\dot{\theta}\sin\theta)(-a\sin\theta)\\
&+(\dot{y}+a\dot{\theta}\cos\theta)a\cos\theta]-m[(\dot{x}-a\dot{\theta}\sin\theta)(-a\dot{\theta}\cos\theta)\\
&+(\dot{y}+a\dot{\theta}\cos\theta)(-a\dot{\theta}\sin\theta)]=M_\theta
\end{aligned}\right\} \tag{9-52}$$

其中X，Y为作用于物体上的主动力在X，Y轴上的投影，M_θ为对铅垂轴的主动力矩。

为简单起见，令$X=Y=M_\theta=0$，即物体A考虑重量外不受任何主动力作用。我们来求问题的解。注意到约束方程(9-50)，方程(9-52)可写成

$$\left.\begin{aligned}&m\frac{d}{dt}(\dot{x}-a\dot{\theta}\sin\theta)=\lambda\sin\theta\\&m\frac{d}{dt}(\dot{y}+a\dot{\theta}\cos\theta)=-\lambda\cos\theta\\&(J_C+ma^2)\ddot{\theta}-ma\dot{\theta}(\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta)=0\end{aligned}\right\}\qquad(9\text{-}53)$$

由(9-53)前两方程消去λ并利用约束(9-50)消去$\dot{y}$，得

$$\ddot{x}-a\dot{\theta}^2\cos\theta+\dot{x}\dot{\theta}\,\mathrm{tg}\theta=0\qquad(9\text{-}54)$$

由(9-53)第三个方程利用约束方程消去$\dot{y}$，得

$$(k^2+a^2)\ddot{\theta}\cos\theta+a\dot{\theta}\dot{x}=0\quad\left(k^2=\frac{J_C}{m}\right)\qquad(9\text{-}55)$$

将(9-54)乘以$\dfrac{\dot{x}}{\cos^2\theta}$，(9-55)乘以$\dfrac{\dot{\theta}}{\cos\theta}$，然后相加，得

$$\frac{\dot{x}\ddot{x}}{\cos^2\theta}+\frac{\dot{x}^2\dot{\theta}\sin\theta}{\cos^3\theta}+(k^2+a^2)\dot{\theta}\ddot{\theta}=0$$

上式可积分为

$$\frac{\dot{x}^2}{\cos^2\theta}+(k^2+a^2)\dot{\theta}^2=\text{const}$$

今取积分常数为h_0^2，则

$$\frac{\dot{x}^2}{\cos^2\theta}+(k^2+a^2)\dot{\theta}^2=h_0^2$$

或
$$\dot{x}^2+(k^2+a^2)\dot{\theta}^2\cos^2\theta-h_0^2\cos^2\theta=0\qquad(9\text{-}56)$$

由此得

$$\dot{x}=\pm\sqrt{h_0^2-(k^2+a^2)\dot{\theta}^2}\cos\theta \tag{9-57}$$

将(9-57)代入(9-55)，得

$$(k^2+a^2)\ddot{\theta}\pm a\sqrt{h_0^2-(k^2+a^2)\dot{\theta}^2}\cdot\dot{\theta}=0 \tag{9-58}$$

假设根据初始值我们研究带正号的运动。令 $\omega=\dot{\theta}$，方程(9-58)可写成

$$-\frac{(k^2+a^2)d\omega}{\sqrt{h_0^2-(k^2+a^2)\omega^2}}=ad\theta \tag{9-59}$$

积分得

$$\sqrt{k^2+a^2}\arccos\left(\frac{\sqrt{k^2+a^2}}{h_0}\omega\right)=a\theta+C \tag{9-60}$$

并且

$$C=\sqrt{k^2+a^2}\arccos\left(\frac{\sqrt{k^2+a^2}}{h_0}\omega_0\right)-a\theta_0$$

其中 ω_0，θ_0 为积分常数。

由(9-60)得

$$\frac{\sqrt{k^2+a^2}}{h_0}\omega=\cos\frac{C+a\theta}{\sqrt{k^2+a^2}}$$

因此

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}=\frac{h_0}{\sqrt{k^2+a^2}}\cos\frac{C+a\theta}{\sqrt{k^2+a^2}} \tag{9-61}$$

将(9-61)分离变量，得

$$\int\frac{d\theta}{\cos\dfrac{C+a\theta}{\sqrt{k^2+a^2}}}=\frac{h_0}{\sqrt{k^2+a^2}}t+C_1'$$

其中 C'_1 为积分常数，取记号

$$\frac{C'_1 a}{\sqrt{k^2+a^2}}=\frac{1}{2}C_1,\quad \frac{ah_0}{k^2+a^2}=\frac{1}{2}C_2$$

并求积分，得

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\dfrac{C+a\theta}{\sqrt{k^2+a^2}}}{1-\sin\dfrac{C+a\theta}{\sqrt{k^2+a^2}}}=C_2 t+C_1 \tag{9-62}$$

由此解得

$$\sin\frac{C+a\theta}{\sqrt{k^2+a^2}}=\operatorname{th}(C_2 t+C_1) \tag{9-63}$$

这就是 θ 对 t 的依赖关系。

将 $\theta=\theta(t)$代入(9-57)，并积分，得 $x=x(t)$。再由 $\theta=\theta(t)$及 $x=x(t)$，利用约束方程(9-50)可得

$$y=y(t)$$

以上称为查浦雷金问题。如果质心的投影不在刀片方向上，则称为卡拉提奥多里问题。第一个问题是在1898年解决的，第二个问题是在 1933 年完成的。

例2. 质量为m的质点受有速度大小为常数的非完整约束，在牛顿中心引力场中的运动问题。

解： 质点所受约束是一阶非线性的，有形式(9-9)，即

$$\phi=\dot r^2+r^2\dot\theta^2+r^2\dot\varphi^2\cos^2\theta=C^2=\text{const} \tag{9-64}$$

因此

$$\frac{\partial\phi}{\partial\dot r}=2\dot r,\quad \frac{\partial\phi}{\partial\dot\theta}=2r^2\dot\theta,\quad \frac{\partial\phi}{\partial\dot\varphi}=2r^2\dot\varphi\cos^2\theta \tag{9-65}$$

质点的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot r^2+r^2\dot\theta^2+r^2\dot\varphi^2\cos^2\theta)$$

故

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}, \quad \frac{\partial T}{\partial r}=mr\dot{\varphi}^2\cos^2\theta+mr\dot{\theta}^2\\
&\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta}=-mr^2\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\varphi}^2\\
&\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}\cos^2\theta, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi}=0
\end{aligned}\right\} \tag{9-66}$$

质点所受广义力为

$$Q_r=-\frac{mM\gamma}{r^2}, \qquad Q_\theta=Q_\varphi=0 \tag{9-67}$$

其中 $M\gamma$ 为引力常数。

质点运动的罗兹方程为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}-\frac{\partial T}{\partial r}=Q_r+\lambda\frac{\partial \phi}{\partial \dot{r}}\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}-\frac{\partial T}{\partial \theta}=Q_\theta+\lambda\frac{\partial \phi}{\partial \dot{\theta}}\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q_\varphi+\lambda\frac{\partial \phi}{\partial \dot{\varphi}}
\end{aligned}\right\} \tag{9-68}$$

将(9-66)、(9-67)、(9-65)代入(9-68)，得

$$\left.\begin{aligned}
&m\ddot{r}-mr\dot{\varphi}^2\cos^2\theta+mr\dot{\theta}^2=-\frac{mM\gamma}{r^2}+2\lambda\dot{r}\\
&m(r^2\ddot{\theta}+2r\dot{r}\dot{\theta})+mr^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta=2\lambda r^2\dot{\theta}\\
&m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}\cos^2\theta)=2\lambda r^2\dot{\varphi}\cos^2\theta
\end{aligned}\right\} \tag{9-69}$$

第六节　查浦雷金方程

1. 查浦雷金方程的建立

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 q_1，q_2，…，q_n 来确

定，此系统受有 g 个一阶线性、齐次、稳定的非完整约束

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\dot{q}_{\sigma} \tag{9-70}$$

$$(\beta=1,2,\cdots,g;\ \varepsilon=n-g)$$

并且系数 $B_{\varepsilon+\beta,\sigma}$ 仅为 q_1，$q_2,\cdots$，q_ε 的函数。由(9-70)知虚位移满足关系

$$\delta q_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\delta q_{\sigma} \tag{9-71}$$

$$(\beta=1,2,\cdots,g;\ \varepsilon=n-g)$$

我们由达朗伯——拉格朗日原理(4-19)出发来推导查浦雷金方程。设力学系统是保守的，力函数为U，则广义力为 $Q_s=\dfrac{\partial U}{\partial q_s}$，于是原理(4-19)成为

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\partial T}{\partial q_s}+\frac{\partial U}{\partial q_s}\right)\delta q_s=0 \tag{9-72}$$

设系统有 g 个循环坐标 $q_{\varepsilon+1},q_{\varepsilon+2},\cdots,q_n$，即动能$T$及力函数$U$与后面 g 个广义坐标无关，于是有

$$\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}=0\quad \begin{pmatrix}\beta=1,2,\cdots,g\\ \varepsilon=n-g\end{pmatrix} \tag{9-73}$$

将(9-71)代入(9-72)，有

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}+\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}+\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}\right)\delta q_\sigma$$

$$+\sum_{\beta=1}^{g}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}+\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}+\frac{\partial U}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\right)B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\delta q_\sigma=0$$

因为这里的 $\delta q_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon)$是独立的，故得马基(Maggi)型方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}-\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial U}{\partial q_{\varepsilon-\beta}}\right)B_{\varepsilon+\beta,\sigma}=0 \qquad (\sigma=1,2,\cdots,g) \quad (9\text{-}74)$$

将(9-73)代入(9-74)，得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial (T+U)}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)=0$$

$$(\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \qquad (9\text{-}75)$$

我们继续变换(9-75)。利用约束关系(9-70)从动能T中消去后面g个$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$，令其为$\tilde{T}$，则

$$\tilde{T}(q_1,q_2,\cdots,q_\varepsilon,\ \dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_\varepsilon)=T(q_1,q_2,\cdots,q_\varepsilon,$$

$$\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_\varepsilon,\ \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{\varepsilon+1,\sigma}\dot{q}_\sigma,\cdots,\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{n,\sigma}\dot{q}_\sigma) \qquad (9\text{-}76)$$

我们有

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_\sigma}&=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\\
\frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_\sigma}&=\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_\sigma}\\
&=\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}\cdot\dot{q}_\nu
\end{aligned}\right\}\quad(9\text{-}77)$$

由(9-77)第一式得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)=\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_\sigma}$$

$$-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{d}{dt}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}=\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}$$

$$\cdot\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu}\dot{q}_\nu \qquad (9\text{-}78)$$

将(9-77)第二式及(9-78)代入(9-75)，便得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu}\right)\dot{q}_\nu=0 \qquad (\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \qquad (9\text{-}79)$$

方程(9-79)就是查浦雷金方程，它的数目等于系统自由度数目。注意到，查浦雷金方程(9-79)适用于约束是理想的，一阶线性齐次的、稳定的，系统是保守的，有与约束方程同数目个循环坐标，且约束系数不依赖于循环坐标的非完整系统。而当

$$\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu}=0$$

时，则约束(9-70)是可积的情形，亦即系统是完整的，则查浦雷金方程(9-79)成为第二类拉格朗日方程。由(9-79)知，在非完整系统的运动方程中不仅包含考虑到约束的动能 $\tilde{T}$，还包含原始的动能 T，而不能仅包含它们中的一个。

查浦雷金方程的优点在于它建立了一个不依赖于约束方程的自治系统。因此，如由(9-79)解得 $q_1(t)$，$q_2(t)$，$\cdots$，$q_\varepsilon(t)$，那么其余的 $q_{\varepsilon+1}(t)$，$\cdots$，$q_n(t)$便可由约束方程来确定。尽管查浦雷金方程(9-79)有种种条件限制，但是直到目前为止，为人们所熟知的系统几乎都是查浦雷金系统。因此查浦雷金方程是很有用的。

查浦雷金方程(9-79)容易推广到非保守系统。实际上，令广义力为 Q_s，其它条件不变，则达朗伯——拉格朗日原理中的主动力的虚功可写成

$$\sum_{s=1}^{n}Q_s\delta q_s=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}Q_\sigma\delta q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}Q_{\varepsilon+\beta}\,\delta q_{\varepsilon+\beta}$$

将(9-71)代入上式得

$$\sum_{s=1}^{n} Q_s\delta q_s=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}(Q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g} Q_{\varepsilon+\beta}B_{\varepsilon+\beta,\sigma})\delta q_\sigma$$

令

$$\tilde{Q}_\sigma=Q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g} Q_{\varepsilon+\beta}\cdot B_{\varepsilon+\beta,\sigma} \qquad (9\text{-}80)$$

则

$$\sum_{s=1}^{n} Q_s\,\delta q_s=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\tilde{Q}_\sigma\,\delta q_\sigma$$

于是查浦雷金方程在非保守系统的情形写成

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\tilde{T}}{\partial q_\sigma}-\tilde{Q}_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu}\right)\dot{q}_\nu=0 \qquad (\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \quad (9\text{-}81)$$

2. 广义查浦雷金方程的建立

现在我们将查浦雷金方程推广到一阶非线性非完整约束系统。

设系统受有 g 个一般的一阶非完整约束

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\dot{q}_{\varepsilon+\beta}(q_s,\ \dot{q}_\sigma,\ t) \qquad (9\text{-}82)$$

$$\left(\begin{array}{l}\beta=1,2,\cdots,g;\ \varepsilon=n-g\\ s=1,2,\cdots,n;\ \sigma=1,2,\cdots,\varepsilon\end{array}\right)$$

按虚位移的切诺耶夫定义(9-19)，则有

$$\delta q_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta q_\sigma \qquad (\beta=1,2,\cdots,g;\varepsilon=n-g) \qquad (9\text{-}83)$$

类似于前面(9-74)，可由达朗伯——拉格朗日原理得到马基型方程

$$\left(Q_\sigma-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\sigma}+\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}\right)+\sum_{\beta=1}^{g}\left(Q_{\varepsilon+\beta}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\right)\frac{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial\dot{q}_\sigma}=0\quad(\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon)\quad(9\text{-}84)$$

令 $\tilde{T}$ 为 T 中借助(9-82)消去 $\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 而得的表达式，则有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{q}_\sigma}&=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial\dot{q}_\sigma}\\\frac{\partial\tilde{T}}{\partial q_\sigma}&=\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_\sigma}\\\frac{\partial\tilde{T}}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}&=\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}+\sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\gamma}}\frac{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\gamma}}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\end{aligned}\right\}\quad(9\text{-}85)$$

将由此解得的$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\sigma}$，$\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}$，$\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}$代入(9-84)，并令

$$\tilde{Q}_\sigma=Q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}Q_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial\dot{q}_\sigma}$$

便得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\tilde{T}}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial\dot{q}_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}T_\sigma{}^{\varepsilon+\beta}$$

$$=\tilde{Q}_\sigma\qquad(\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon)\qquad(9\text{-}86)$$

其中 $$T_\sigma{}^{\varepsilon+\beta}=\frac{d}{dt}\frac{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_\sigma}-\sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}\frac{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\gamma}}{\partial\dot{q}_\sigma}$$

(9-87)

方程(9-86)称为广义查浦雷金方程，它比查浦雷金方程(9-79)、(9-81)更一般，适用于具有形如(9-82)的一阶非线性非完整约束系统。方程(9-86)由苏联B. C. 诺沃谢洛夫1957年得到。

注意到(9-85)的第三式，方程(9-86)可以写成牛青带形

式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_\sigma}\right)$$

$$-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}=\tilde{Q}_\sigma \quad (\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \quad (9\text{-}88)$$

3. **例题**

例1. 匀质圆盘在重力作用下，沿完全粗糙水平面的滚动。

解：如第一节例3，取圆盘中心坐标 x，y 及三个欧拉角 ψ，θ，φ 为广义坐标。非完整约束方程为(9-5)，即

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}+a(\dot{\psi}\cos\psi\cos\theta-\dot{\theta}\sin\psi\sin\theta+\dot{\varphi}\cos\psi)=0\\&\dot{y}+a(\dot{\psi}\sin\psi\cos\theta+\dot{\theta}\cos\psi\sin\theta+\dot{\varphi}\sin\psi)=0\end{aligned}\right\} \quad (9\text{-}89)$$

以及完整约束

$$\dot{z}=a\dot{\theta}\cos\theta$$

令圆盘质量为 m，对通过其中心在圆盘平面内的轴的主转动惯量为 A，对垂直于圆盘平面并通过其中心的轴的主转动惯量为 C，则圆盘的动能按公式(4-38)为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\frac{1}{2}(Ap^2+Aq^2+Cr^2) \quad (9\text{-}90)$$

其中 p，q，r 为圆盘角速度在与其固联的轴上的投影，用欧拉角及其变化率表为

$$\left.\begin{aligned}p&=\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi+\dot{\theta}\cos\varphi\\q&=\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi-\dot{\theta}\sin\varphi\\r&=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}\end{aligned}\right\} \quad (9\text{-}91)$$

将 $\dot{z}=a\dot{\theta}\cos\dot{\theta}$ 以及(9-91)代入(9-90)，得

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}\{A\dot{\theta}^2$$

$$+A\dot{\psi}^2\sin^2\theta+C(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})^2\} \tag{9-92}$$

将(9-89)代入(9-92)消去 $\dot{x}$，$\dot{y}$，得

$$\tilde{T}=\frac{1}{2}\{(A+ma^2)\dot{\theta}^2+A\dot{\psi}^2\sin^2\theta$$

$$+(C+ma^2)(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})^2\} \tag{9-93}$$

由(9-89)知，约束是一阶线性齐次稳定的，且约束系数不含 x，y；由(9-92)知 T 不含 x，y（且不含 ψ，φ）；圆盘的主动力仅为重力，力函数为

$$U=-mga\sin\theta \tag{9-94}$$

故 U 亦不依赖 x、y。因此，问题属于查浦雷金系统，可应用查浦雷金方程(9-79)。我们作下列计算

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{\psi}}-\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\psi}=\frac{d}{dt}\{(C+ma^2)(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\cos\theta\\
&\qquad+A\dot{\psi}\sin^2\theta)\}\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\theta}=\frac{d}{dt}[(A+ma^2)\dot{\theta}]-\{-(C\\
&\qquad+ma^2)(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})\dot{\psi}\sin\theta+A\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta\}\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\varphi}=\frac{d}{dt}\{(C+ma^2)(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})\}
\end{aligned}\right\} \tag{9-95}$$

由(9-94)计算出广义力

$$\frac{\partial U}{\partial\psi}=\frac{\partial U}{\partial\varphi}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial\theta}=-mga\cos\theta \tag{9-96}$$

下面计算查浦雷金方程中带约束系数的非完整项。令 $q_1=\psi$，$q_2=\theta$，$q_3=\varphi$，$q_4=x$，$q_5=y$，由(9-89)知：

$$B_{41}=-a\cos\theta\cos\psi,\quad B_{42}=a\sin\theta\sin\psi,\quad B_{43}=-a\cos\psi$$

$$B_{51}=-a\cos\theta\sin\psi,\ B_{52}=-a\sin\theta\cos\psi,\ B_{53}=-a\sin\psi$$

因此

$$\sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{\partial B_{4,\nu}}{\partial q_1}-\frac{\partial B_{41}}{\partial q_\nu}\right)\dot{q}_\nu=a\dot{\varphi}\sin\psi$$

$$\sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{\partial B_{5,\nu}}{\partial q_1}-\frac{\partial B_{51}}{\partial q_\nu}\right)\dot{q}_\nu=-a\dot{\varphi}\cos\psi$$

又

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_4}=m\dot{x}=-ma(\dot{\psi}\cos\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\theta\sin\psi+\dot{\varphi}\cos\psi)$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_5}=m\dot{y}=-ma(\dot{\psi}\cos\theta\sin\psi+\dot{\theta}\sin\theta\cos\psi+\dot{\varphi}\sin\psi)$$

于是得

$$\begin{aligned}&\sum_{\beta=1}^{2}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{3+\beta}}\sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{\partial B_{3+\beta,\nu}}{\partial q_1}-\frac{\partial B_{3+\beta,1}}{\partial q_\nu}\right)\dot{q}_\nu\\&=-ma^2\dot{\varphi}\sin\psi(\dot{\psi}\cos\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\theta\sin\psi+\dot{\varphi}\cos\psi)\\&\quad+ma^2\dot{\varphi}\cos\psi(\dot{\psi}\cos\theta\sin\psi+\dot{\theta}\sin\theta\cos\psi+\dot{\varphi}\sin\psi)\\&=ma^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta\end{aligned}\tag{9-97}$$

类似地，有

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\beta=1}^{2}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{3+\beta}}\sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{\partial B_{3+\beta,\nu}}{\partial q_2}-\frac{\partial B_{3+\beta,2}}{\partial q_\nu}\right)\dot{q}_\nu=0\\&\sum_{\beta=1}^{2}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{3+\beta}}\sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{\partial B_{3+\beta,\nu}}{\partial q_3}-\frac{\partial B_{3+\beta,3}}{\partial q_\nu}\right)\dot{q}_\nu\\&\qquad=-ma^2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\end{aligned}\right\}\tag{9-98}$$

将 (9-95)、(9-96)、(9-97)、(9-98)代入(9-79)，便得

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\{(C+ma^2)(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\cos\theta+A\dot{\psi}\sin^2\theta\} \\
&\qquad +ma^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta=0 \\
&\frac{d}{dt}\{(A+ma^2)\dot{\theta}\}-\{-(C+ma^2)(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})\dot{\psi}\sin\theta \\
&\qquad +A\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta\}+mga\cos\theta=0 \\
&\frac{d}{dt}\{(C+ma^2)(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})\}-ma^2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta=0
\end{aligned}\right\} \tag{9-99}
$$

方程(9-99)就是圆盘运动微分方程，在给定初始条件下可由此求得ψ，θ，φ，再将ψ，θ，φ代入约束方程(9-89)可得x，y。

例2. 一质量为m的质点受有速度大小为常数的非完整约束，在牛顿中心引力场中的运动问题。

解： 以引力中心为原点，取点的球坐标r，θ，φ为广义坐标，令$q_1=r$，$q_2=\theta$，$q_3=\varphi$，约束方程为(9-9)，即

$$
\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\theta=C^2=\text{const} \tag{9-100}
$$

我们利用广义查浦雷金方程来建立质点运动微分方程。

质点的动能为

$$
T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\theta) \tag{9-101}
$$

考虑到约束(9-100)，则动能为

$$
\tilde{T}=\frac{1}{2}mC^2=\text{const}
$$

于是

$$
\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{r}}=\frac{\partial\tilde{T}}{\partial r}=\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{\theta}}=\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\theta}=\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\varphi}=0 \tag{9-102}
$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}\cos^2\theta \tag{9-103}$$

由约束方程解出

$$\dot{\varphi}^2=\frac{C^2-\dot{r}^2-r^2\dot{\theta}^2}{r^2\cos^2\theta}$$

因此计算得

$$\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial\dot{r}}=-\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}r^2\cos^2\theta},\qquad \frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial r}=-\frac{\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\cos^2\theta}{r\dot{\varphi}\cos^2\theta}$$

$$\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial\dot{\theta}}=-\frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}\cos^2\theta},\qquad \frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial\theta}=\dot{\varphi}\,tg\theta$$

因此

$$\left.\begin{aligned}
T_1^*&=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial\dot{r}}\right)-\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial r}\\
&=-\frac{r\ddot{r}\dot{\varphi}\cos\theta-\dot{r}(r\ddot{\varphi}\cos\theta+2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\theta-2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta)}{\dot{\varphi}^2r^3\cos^3\theta}\\
&\quad+\frac{\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\cos^2\theta}{r\dot{\varphi}\cos^2\theta}\\
T_2^*&=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial\theta}\\
&=-\frac{\ddot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta-\dot{\theta}\ddot{\varphi}\cos\theta+2\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta}{\dot{\varphi}^2\cos^3\theta}-\dot{\varphi}\,\mathrm{tg}\theta
\end{aligned}\right\} \tag{9-104}$$

广义力为

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{Q}_1&=Q_1=-\frac{mM\gamma}{r^2}\\
\tilde{Q}_2&=0
\end{aligned}\right\} \tag{9-105}$$

广义查浦雷金方程(9-86)取形式

$$-\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} T_1^3 = \tilde{Q}_1, \qquad -\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} T_2^3 = \tilde{Q}_2 \tag{9-106}$$

将(9-103)、(9-104)及(9-105)代入(9-106)，并简化得

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{r}-\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}\ddot{\varphi}-r\dot{\theta}^2-\frac{2\dot{r}^2}{r}+2\dot{r}\dot{\theta}\operatorname{tg}\theta-r\dot{\varphi}^2\cos^2\theta=-\frac{M\gamma}{r^2}\\&r^2\ddot{\theta}-r^2\frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}}\ddot{\varphi}+2r^2\dot{\theta}^2\operatorname{tg}\theta+r^2\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta=0\end{aligned}\right\} \tag{9-107}$$

第七节 阿沛尔方程

法国学者阿沛尔(P. Appell)于 1898 年得到了本质上不同于其他人的一阶线性非完整约束系统的运动微分方程。这方程不仅适用于完整系统，而且适用于非完整系统。本世纪四十年代有人把阿沛尔方程推广到一阶非线性非完整约束系统。

1. 阿沛尔方程的建立

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 q_1，q_2，…，q_n 来确定，受有 g 个一阶非线性非完整约束

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\dot{q}_{\varepsilon+\beta}(q_s,\dot{q}_\sigma,t) \tag{9-108}$$

$$\left(\begin{aligned}&\beta=1,2,\cdots,g;\ \varepsilon=n-g;\\&\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon;\ s=1,2,\cdots,n\end{aligned}\right)$$

我们由高斯原理(8-27)出发来推导阿沛尔方程。将高斯原理(8-27)写成直角坐标形式为

$$\sum_{i=1}^{N}\{(-m_i\ddot{x}_i+F_{ix})\delta\ddot{x}_i+(-m_i\ddot{y}_i+F_{iy})\delta\ddot{y}_i+(-m_i\ddot{z}_i+F_{iz})\delta\ddot{z}_i\}=0 \tag{9-109}$$

将系统中点的速度、加速度用广义速度、广义加速度表出

$$\dot{x}_i=\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma}\dot{q}_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial x_i}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$$

$$\ddot{x}_i=\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma}\ddot{q}_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial x_i}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}+\cdots \tag{9-110}$$

其中未写出之项不含 $\ddot{q}_s$。对 $\ddot{y}_i$，$\ddot{z}_i$ 有类似的表达式。

将约束方程(9-108)对时间求导数，得

$$\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}=\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}(\ddot{q}_\sigma,\dot{q}_\sigma,q_s,t)$$

上式两边对广义加速度取变分，则有

$$\delta\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial\ddot{q}_\sigma}\delta\ddot{q}_\sigma \tag{9-111}$$

由(9-110)、(9-111)，得

$$\begin{aligned}\delta\ddot{x}_i&=\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma}\delta\ddot{q}_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial x_i}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\delta\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}\\&=\sum_{\sigma=1}^{s}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial x_i}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial\ddot{q}_\sigma}\right)\delta\ddot{q}_\sigma\end{aligned} \tag{9-112}$$

类似地有

$$\left.\begin{aligned}\delta\ddot{y}_i&=\sum_{\sigma=1}^{s}\left(\frac{\partial y_i}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial y_i}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial\ddot{q}_\sigma}\right)\delta\ddot{q}_\sigma\\\delta\ddot{z}_i&=\sum_{\sigma=1}^{s}\left(\frac{\partial z_i}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial z_i}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial\ddot{q}_\sigma}\right)\delta\ddot{q}_\sigma\end{aligned}\right\} \tag{9-113}$$

将(9-112)、(9-113)代入高斯原理(9-109)，使得

$$\begin{aligned}-\sum_{i=1}^{N}m_i\Bigg\{&\ddot{x}_i\sum_{\sigma=1}^{s}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial x_i}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial\ddot{q}_\sigma}\right)\\&+\ddot{y}_i\sum_{\sigma=1}^{s}\left(\frac{\partial y_i}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial y_i}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial\ddot{q}_\sigma}\right)\\&+\ddot{z}_i\sum_{\sigma=1}^{s}\left(\frac{\partial z_i}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial z_i}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial\ddot{q}_\sigma}\right)\Bigg\}\delta\ddot{q}_\sigma\end{aligned}$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\left\{F_{ix}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial x_i}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \ddot{q}_\sigma}\right)\right.$$

$$+F_{iy}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial y_i}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial y_i}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \ddot{q}_\sigma}\right)$$

$$\left.+F_{iz}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial z_i}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial z_i}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \ddot{q}_\sigma}\right)\right\}\delta\ddot{q}_\sigma=0 \tag{9-114}$$

现在引入加速度能量函数 S

$$S=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i(\ddot{x}_i^2+\ddot{y}_i^2+\ddot{z}_i^2) \tag{9-115}$$

令 $\tilde{S}$ 为 S 中借助约束(9-108)消去不独立的广义加速度 $\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 的表达式，则

$$\tilde{S}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i(\widetilde{\ddot{x}}_i^2+\widetilde{\ddot{y}}_i^2+\widetilde{\ddot{z}}_i^2)$$

其中 $\widetilde{\ddot{x}}_i$，$\widetilde{\ddot{y}}_i$，$\widetilde{\ddot{z}}_i$ 仅包含 $\ddot{q}_\sigma$。

将 $\tilde{S}$ 对独立的广义加速度 $\ddot{q}_\sigma$ 求偏导数， 并考虑到 (9-110)，则有

$$\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\ddot{q}_\sigma}=\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\widetilde{\ddot{x}}_i\frac{\partial\widetilde{\ddot{x}}_i}{\partial\ddot{q}_\sigma}+\widetilde{\ddot{y}}_i\frac{\partial\widetilde{\ddot{y}}_i}{\partial\ddot{q}_\sigma}+\widetilde{\ddot{z}}_i\frac{\partial\widetilde{\ddot{z}}_i}{\partial\ddot{q}_\sigma}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{N}m_i\left\{\ddot{x}_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial x_i}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \ddot{q}_\sigma}\right)\right.$$

$$+\ddot{y}_i\left(\frac{\partial y_i}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial y_i}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \ddot{q}_\sigma}\right)$$

$$\left.+\ddot{z}_i\left(\frac{\partial z_i}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial z_i}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \ddot{q}_\sigma}\right)\right\} \tag{9-116}$$

令 $$Q_s=\sum_{i=1}^{N}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)$$

$$(s=1,2,\cdots,n)$$

它却为广义力，并令

$$\tilde{Q}_\sigma = Q_\sigma + \sum_{\beta=1}^{g} Q_{\varepsilon+\beta} \frac{\partial \ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \ddot{q}_\sigma} \quad (\sigma=1,2,\cdots,s) \quad (9\text{-}117)$$

将(9-116)、(9-117)代入(9-114)，便得

$$\sum_{\sigma=1}^{s}\left(-\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \ddot{q}_\sigma}+\tilde{Q}_\sigma\right)\delta\ddot{q}_\sigma=0 \qquad (9\text{-}118)$$

因 $\delta\ddot{q}_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,s)$是彼此独立的，故由(9-118)得

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \ddot{q}_\sigma}=\tilde{Q}_\sigma \qquad (\sigma=1,2,\cdots,s) \qquad (9\text{-}119)$$

方程(9-119)就是阿沛尔方程，其中 $\tilde{S}$ 是已考虑到约束消去不独立广义加速度 $\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 所得表达式。阿沛尔方程的数目等于系统自由度数目 $\varepsilon=n-g$，这些方程是相对独立广义加速度 $\ddot{q}_1,\ddot{q}_2,\cdots,\ddot{q}_\varepsilon$ 的线性微分方程组，它们联系约束方程(9-108)便可求解运动。阿沛尔方程形式上非常简单，只用一个函数 S 便可确定。应用阿沛尔方程的主要困难在于列写加速度能量函数 S。

阿沛尔方程(9-119)是对一阶非线性非完整约束系统建立的，自然适合一阶线性非完整约束系统。如约束是一阶线性非完整的，有形式

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{s} B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\dot{q}_\sigma + B_{\varepsilon+\beta}$$

则

$$\tilde{Q}_\sigma = Q_\sigma + \sum_{\beta=1}^{g} Q_{\varepsilon+\beta}\cdot B_{\varepsilon+\beta,\sigma} \qquad (9\text{-}120)$$

如果系统是完整的，可以证明阿沛尔方程与第二类拉格朗日方程相重合。

我们由推导阿沛尔方程的过程容易看出，如果约束是二

阶非完整的，即

$$\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}=\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}(\ddot{q}_\sigma, \dot{q}_s, q_s, t) \qquad (9\text{-}121)$$

那么仍有形如(9-119)的方程。

2. 例题

例1. 匀质圆球在粗糙水平面上的纯滚动。

解： 我们利用阿沛尔方程来建立圆球的运动微分方程。为此，首先列写圆球的加速度能量函数 S。设球上任意点在空间固定坐标系中的坐标为 x_i, y_i, z_i，质量为 m_i，则

$$S=\frac{1}{2}\Sigma m_i(\ddot{x}_i^2+\ddot{y}_i^2+\ddot{z}_i^2) \qquad (9\text{-}122)$$

现将 S 用球心加速度和欧拉角及其变化率表出。在球心取一相对于空间固定坐标系 $OXYZ$ 保持平动的坐标系 $CX_1Y_1Z_1$ 以及与球相固联的坐标系 $CX'Y'Z'$，此二坐标系轴向单位矢量记作 $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{k}_1$ 及 $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$，两坐标系轴间方向余弦记作

$$\alpha_1=\boldsymbol{i}_1\cdot\boldsymbol{i}',\quad \beta_1=\boldsymbol{i}_1\cdot\boldsymbol{j}',\quad \gamma_1=\boldsymbol{i}_1\cdot\boldsymbol{k}'$$
$$\alpha_2=\boldsymbol{j}_1\cdot\boldsymbol{i}',\quad \beta_2=\boldsymbol{j}_1\cdot\boldsymbol{j}',\quad \gamma_2=\boldsymbol{j}_1\cdot\boldsymbol{k}'$$
$$\alpha_3=\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{i}',\quad \beta_3=\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{j}',\quad \gamma_3=\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}'$$

这些方向余弦可用欧拉角表出。将 $\boldsymbol{i}'$ 用 $\boldsymbol{i}_1$，$\boldsymbol{j}_1$，$\boldsymbol{k}_1$ 表出。先将 $\boldsymbol{i}'$ 分解为 $\boldsymbol{n}$ 及 $\boldsymbol{n}'$ 方向，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{n}'$ 分别为 CN，CN' 方向的单位矢量（图9-2），我们有

$$\boldsymbol{i}'=\boldsymbol{n}\cos\varphi+\boldsymbol{n}'\sin\varphi$$

将 $\boldsymbol{n}$ 分解为 $\boldsymbol{i}_1$，$\boldsymbol{j}_1$ 方向，有

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}_1\cos\psi+\boldsymbol{j}_1\sin\psi$$

再将 $\boldsymbol{n}'$ 分解为 $\boldsymbol{n}_1$ 及 $\boldsymbol{k}_1$ 方向，有

$$\boldsymbol{n}'=\boldsymbol{n}_1\cos\theta+\boldsymbol{k}_1\sin\theta$$

并将 $\boldsymbol{n}_1$ 分解为 $\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{j}_1$ 方向，有

$$\boldsymbol{n}_1=-\boldsymbol{i}_1\sin\psi+\boldsymbol{j}_1\cos\psi$$

因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i}'=&\boldsymbol{i}_1(\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\sin\varphi\cos\theta)\\&+\boldsymbol{j}_1(\sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\sin\varphi\cos\theta)+\boldsymbol{k}_1(\sin\theta\sin\varphi)\end{aligned}$$

类似地有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}'=&\boldsymbol{i}_1(-\cos\psi\sin\varphi-\sin\psi\cos\varphi\cos\theta)\\&+\boldsymbol{j}_1(-\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\varphi\cos\theta)+\boldsymbol{k}_1(\sin\theta\cos\varphi)\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{i}_1(\sin\psi\sin\theta)+\boldsymbol{j}_1(-\cos\psi\sin\theta)+\boldsymbol{k}_1\cos\theta$$

于是得

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\sin\varphi\cos\theta\\\alpha_2&=\sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\sin\varphi\cos\theta\\\alpha_3&=\sin\theta\sin\varphi\\\beta_1&=-\cos\psi\sin\varphi-\sin\psi\cos\varphi\cos\theta\\\beta_2&=-\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\varphi\cos\theta\\\beta_3&=\sin\theta\cos\varphi\\\gamma_1&=\sin\psi\sin\theta\\\gamma_2&=-\cos\psi\sin\theta\\\gamma_3&=\cos\theta\end{aligned}\right\}\tag{9-123}$$

设质点 m_i 在 $CX'Y'Z'$ 中的坐标为 ξ_i,η_i,ζ_i，球心的固定坐标为 x,y,z，则

$$\left.\begin{aligned}x_i&=x+\alpha_1\xi_i+\beta_1\eta_i+\gamma_1\zeta_i\\y_i&=y+\alpha_2\xi_i+\beta_2\eta_i+\gamma_2\zeta_i\\z_i&=z+\alpha_3\xi_i+\beta_3\eta_i+\gamma_3\zeta_i\end{aligned}\right\}\tag{9-124}$$

将(9-124)对时间 t 求两次导数，因 ξ_i,η_i,ζ_i 不随时间变化，故得

$$\ddot{x}_i=\ddot{x}+\ddot{\alpha}_1\xi_i+\ddot{\beta}_1\eta_i+\ddot{\gamma}_1\zeta_i$$
$$\ddot{y}_i=\ddot{y}+\ddot{\alpha}_2\xi_i+\ddot{\beta}_2\eta_i+\ddot{\gamma}_2\zeta_i$$
$$\ddot{z}_i=\ddot{z}+\ddot{\alpha}_3\xi_i+\ddot{\beta}_3\eta_i+\ddot{\gamma}_3\zeta_i$$

因球在水平面 XOY 上滚动，有 $z=a$（a 为球的半径），故 $\ddot{z}=0$，因此，加速度能量为

$$S=\frac{1}{2}\Sigma m_i[(\ddot{x}+\ddot{\alpha}_1\xi_i+\ddot{\beta}_1\eta_i+\ddot{\gamma}_1\zeta_i)^2$$
$$+(\ddot{y}+\ddot{\alpha}_2\xi_i+\ddot{\beta}_2\eta_i+\ddot{\gamma}_2\zeta_i)^2+(\ddot{\alpha}_3\xi_i+\ddot{\beta}_3\eta_i+\ddot{\gamma}_3\zeta_i)^2]$$
$$=\frac{1}{2}(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2)\Sigma m_i+\frac{1}{2}[2\ddot{x}(\ddot{\alpha}_1\Sigma m_i\xi_i+\ddot{\beta}_1\Sigma m_i\eta_i$$
$$+\ddot{\gamma}_1\Sigma m_i\zeta_i)+2\ddot{y}(\ddot{\alpha}_2\Sigma m_i\xi_i+\ddot{\beta}_2\Sigma m_i\eta_i+\ddot{\gamma}_2\Sigma m_i\zeta_i)$$
$$+2(\ddot{\alpha}_1\ddot{\beta}_1+\ddot{\alpha}_2\ddot{\beta}_2+\ddot{\alpha}_3\ddot{\beta}_3)\Sigma m_i\xi_i\eta_i+2(\ddot{\beta}_1\ddot{\gamma}_1+\ddot{\beta}_2\ddot{\gamma}_2$$
$$+\ddot{\beta}_3\ddot{\gamma}_3)\Sigma m_i\eta_i\zeta_i+2(\ddot{\gamma}_1\ddot{\alpha}_1+\ddot{\gamma}_2\ddot{\alpha}_2+\ddot{\gamma}_3\ddot{\alpha}_3)\Sigma m_i\zeta_i\xi_i$$
$$+(\ddot{\alpha}_1^2+\ddot{\alpha}_2^2+\ddot{\alpha}_3^2)\Sigma m_i\xi_i^2+(\ddot{\beta}_1^2+\ddot{\beta}_2^2+\ddot{\beta}_3^2)\Sigma m_i\eta_i^2$$
$$+(\ddot{\gamma}_1^2+\ddot{\gamma}_2^2+\ddot{\gamma}_3^2)\Sigma m_i\zeta_i^2]$$

因为匀质球有

$$\Sigma m_i\xi_i\eta_i=\Sigma m_i\eta_i\zeta_i=\Sigma m_i\zeta_i\xi_i=0$$

以及

$$\Sigma m_i\xi_i^2=\Sigma m_i\eta_i^2=\Sigma m_i\zeta_i^2=\frac{1}{2}\Sigma m_i(\xi_i^2+\eta_i^2)$$
$$=\frac{1}{2}J_\zeta=\frac{1}{2}M\cdot\frac{2}{5}a^2$$

其中M为球的质量。于是

$$S=\frac{1}{2}M(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}Ma^2(\ddot{\alpha}_1^2+\ddot{\alpha}_2^2+\ddot{\alpha}_3^2$$
$$+\ddot{\beta}_1^2+\ddot{\beta}_2^2+\ddot{\beta}_3^2+\ddot{\gamma}_1^2+\ddot{\gamma}_2^2+\ddot{\gamma}_3^2) \tag{9-125}$$

上式第一项为球的质量集中在球心所表现的加速度能量，第

二项是球相对球心转动所表现的加速度能量。将(9-123)对时间求两次导数并代入(9-125)，整理得

$$S=\frac{1}{2}M(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2)+\frac{1}{2}\ \frac{2}{5}Ma^2\{\ddot{\theta}^2+\ddot{\varphi}^2+\ddot{\psi}^2$$
$$+2\ddot{\varphi}\ddot{\psi}\cos\theta+2\sin\theta(\dot{\varphi}\dot{\psi}\ddot{\theta}-\dot{\psi}\dot{\theta}\ddot{\varphi}-\dot{\theta}\dot{\varphi}\ddot{\psi})\}+\cdots \tag{9-126}$$

其中未写出之项不含广义加速度。

约束方程为(9-3)，即

$$\dot{x}=-a(\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi)$$
$$\dot{y}=-a(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi)$$

因此

$$\ddot{x}=a(\ddot{\theta}\sin\psi+\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi-\ddot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\cos\psi$$
$$+\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\sin\psi)$$
$$\ddot{y}=-a(\ddot{\theta}\cos\psi-\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\psi+\ddot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\psi$$
$$+\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\cos\psi)$$

于是

$$\ddot{x}^2+\ddot{y}^2=a^2(\ddot{\theta}^2+\ddot{\varphi}^2\sin^2\theta+2\ddot{\theta}\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta$$
$$-2\ddot{\varphi}\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta+2\ddot{\varphi}\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta)+\cdots$$

其中未写出之项不含广义加速度。将上式代入(9-126)，得

$$\tilde{S}=\frac{1}{2}Ma^2\left\{\frac{7}{5}\ddot{\theta}^2+\frac{2}{5}\ddot{\varphi}^2+\frac{2}{5}\ddot{\varphi}^2\sin^2\theta+\frac{2}{5}\ddot{\psi}^2+\frac{4}{5}\ddot{\varphi}\ddot{\psi}\cos\theta\right.$$
$$+\frac{14}{5}\ddot{\theta}\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta-\frac{14}{5}\ddot{\varphi}\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta-\frac{4}{5}\ddot{\psi}\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta$$
$$\left.+2\ddot{\varphi}\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta\right\} \tag{9-127}$$

因此，我们有

$$\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\ddot{\theta}}=Ma^2\left(\frac{7}{5}\ddot{\theta}+\frac{7}{5}\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\right)$$

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \ddot{\psi}} &= Ma^2\left(\frac{2}{5}\ddot{\psi} - \frac{2}{5}\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta + \frac{2}{5}\ddot{\varphi}\cos\theta\right) \\
\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \ddot{\varphi}} &= Ma^2\left(\frac{2}{5}\ddot{\varphi} + \ddot{\varphi}\sin^2\theta + \frac{2}{5}\ddot{\psi}\cos\theta\right. \\
&\quad \left. - \frac{7}{5}\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta + \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta\right)
\end{aligned}\right\} \quad (9\text{-}128)
$$

设系统具有势能函数 $V(x,y)$，我们来计算广义力 $\tilde{Q}_\psi$，$\tilde{Q}_\theta$，$\tilde{Q}_\varphi$。因

$$
Q_x = -\frac{\partial V}{\partial x},\quad Q_y = -\frac{\partial V}{\partial y},\quad Q_\psi = Q_\theta = Q_\varphi = 0
$$

注意到约束方程(9-3)，我们有

$$
\begin{aligned}
\tilde{Q}_\psi &= Q_\psi \\
\tilde{Q}_\varphi &= Q_\varphi - Q_x a\sin\theta\cos\psi - Q_y a\sin\theta\sin\psi \\
\tilde{Q}_\theta &= Q_\theta + Q_x a\sin\psi - Q_y a\cos\psi
\end{aligned}
$$

因此

$$
\left.\begin{aligned}
\tilde{Q}_\psi &= 0 \\
\tilde{Q}_\varphi &= a\sin\theta\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cos\psi + \frac{\partial V}{\partial y}\sin\psi\right) \\
\tilde{Q}_\theta &= -a\left(\frac{\partial V}{\partial x}\sin\psi - \frac{\partial V}{\partial y}\cos\psi\right)
\end{aligned}\right\} \quad (9\text{-}129)
$$

将(9-128)、(9-129)代入阿沛尔方程(9-119)，得

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{7}{5}Ma^2(\ddot{\theta} + \dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta) = -a\left(\frac{\partial V}{\partial x}\sin\psi\right. \\
&\qquad \left. - \frac{\partial V}{\partial y}\cos\psi\right) \\
&\ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta = 0 \\
&Ma^2\left(\frac{2}{5}\ddot{\varphi} + \ddot{\varphi}\sin^2\theta + \frac{2}{5}\ddot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta\right.
\end{aligned}\right.
$$

$$-\frac{7}{5}\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta\Big)=a\sin\theta\Big(\frac{\partial V}{\partial x}\cos\psi+\frac{\partial V}{\partial y}\sin\psi\Big) \tag{9-130}$$

这就是所求运动微分方程。

例2. 一质量为m的质点受有速度大小为常数的非完整约束，在牛顿中心引力场中的运动问题。

解： 质点所受约束为(9-9)，即

$$\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\theta=C^2=const \tag{9-131}$$

质点的加速度能量为

$$S=\frac{1}{2}m(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2)=\frac{1}{2}m(a_r^2+a_\theta^2+a_\varphi^2)$$

其中a_r, a_θ, a_φ为点在球坐标中的加速度，有

$$a_r=\ddot{r}-r(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\cos^2\theta)$$

$$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}+r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta$$

$$a_\varphi=r\ddot{\varphi}\cos\theta+2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\theta-2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta$$

因此
$$S=\frac{1}{2}m\{(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\cos^2\theta-r\dot{\theta}^2)^2+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}+r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)^2+(r\ddot{\varphi}\cos\theta+2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\theta-2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta)^2\} \tag{9-132}$$

将(9-131)两边对t求导数，解得

$$\ddot{\varphi}=-\frac{\dot{r}\ddot{r}+r^2\dot{\theta}\ddot{\theta}}{r^2\dot{\varphi}\cos^2\theta}$$

因此

$$\frac{\partial\ddot{\varphi}}{\partial\ddot{r}}=-\frac{\dot{r}}{r^2\dot{\varphi}\cos^2\theta},$$

$$\frac{\partial\ddot{\varphi}}{\partial\ddot{\theta}}=-\frac{r^2\dot{\theta}}{r^2\dot{\varphi}\cos^2\theta}=-\frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}\cos^2\theta} \tag{9-133}$$

令 $\tilde{S}$ 为由 S 中借助约束方程消去不独立的 $\ddot{\varphi}$ 所得表达式，则

$$\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\ddot{r}}=\frac{\partial S}{\partial\ddot{r}}+\frac{\partial S}{\partial\ddot{\varphi}}\frac{\partial\ddot{\varphi}}{\partial\ddot{r}}$$

$$=m\Big\{(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\cos^2\theta-r\dot{\theta}^2)+(r\ddot{\varphi}\cos\theta+2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\theta$$

$$-2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta)\,r\cos\Big(-\frac{\dot{r}}{r^2\dot{\varphi}\cos^2\theta}\Big)\Big\}$$

$$=m\Big\{\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\varphi}^2\cos^2\theta-\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}\ddot{\varphi}-2\frac{\dot{r}^2}{r}+2\dot{r}\ \dot{\theta}\ \mathrm{tg}\,\theta\Big\}$$

(9-134)

$$\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\ddot{\theta}}=\frac{\partial S}{\partial\ddot{\theta}}+\frac{\partial S}{\partial\ddot{\varphi}}\frac{\partial\ddot{\varphi}}{\partial\ddot{\theta}}$$

$$=m\Big\{(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}+r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)r+(r\ddot{\varphi}\cos\theta$$

$$+2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\theta-2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta)r\cos\theta\Big(-\frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}\cos^2\theta}\Big)\Big\}$$

$$=m\{r^2\ddot{\theta}+r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\ \cos\theta-r^2\frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}}\ddot{\varphi}+2r^2\dot{\theta}^2\mathrm{tg}\,\theta\}$$

(9-135)

广义力为

$$Q_r=-\frac{mM\gamma}{r^2},\qquad Q_\theta=Q_\varphi=0$$

故

$$\left.\begin{aligned}\tilde{Q}_r&=Q_r+Q_\varphi\frac{\partial\ddot{\varphi}}{\partial\ddot{r}}=-\frac{mM\gamma}{r^2}\\ \tilde{Q}_\theta&=Q_\theta+Q_\varphi\frac{\partial\ddot{\varphi}}{\partial\ddot{\theta}}=0\end{aligned}\right\}\qquad(9\text{-}136)$$

阿沛尔方程(9-119)给出

$$\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\ddot{r}}=\tilde{Q}_r,\qquad \frac{\partial\tilde{S}}{\partial\ddot{\theta}}=\tilde{Q}_\theta\qquad(9\text{-}137)$$

将(9-134)、(9-135)、(9-136)代入(9-137)，得

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\varphi}^2\cos^2\theta-\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}\ddot{\varphi}-2\frac{\dot{r}^2}{r}+2\dot{r}\dot{\theta}\ \mathrm{tg}\theta\\&\quad=-\frac{M\gamma}{r^2}\\&r^2\ddot{\theta}+r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta-r^2\frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}}\ddot{\varphi}+2r^2\dot{\theta}^2\mathrm{tg}\theta\\&\quad=0\end{aligned}\right\}\tag{9-138}$$

第八节　广义尼尔森方程*

现在我们将完整系统的尼尔森方程(6-15)推广到非完整系统，得到非完整力学系统的一类新型运动微分方程。

1. 茹尔当原理的尼尔森形式

茹尔当原理为(8-25)，即

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i)\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_i=0\tag{9-139}$$

由速度空间的虚位移定义，知

$$\delta\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_s}\delta\dot{q}_s\tag{9-140}$$

将(9-140)、(6-13)代入原理(9-139)，我们得到

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q_s+2\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}_s}\right)\delta\dot{q}_s=0\tag{9-141}$$

这就是茹尔当原理的尼尔森形式。

如果系统是完整的，(9-141)中的 $\delta\dot{q}_s$ 彼此独立，则由此得到尼尔森方程(6-15)：

* 参见论文"非完整力学系统的广义 Nielsen 方程"，《力学与实践》1980年第三期，p61-p62。

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - 2\frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s \quad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (9\text{-}142)$$

2. 广义尼尔森方程的推导

设力学系统受有彼此独立的 g 个非线性非完整约束

$$f_\beta(q_s, \dot{q}_s, t) = 0 \quad (\beta=1,2,\cdots,g;\ s=1,2,\cdots,n) \qquad (9\text{-}143)$$

设雅科比行列式

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_g)}{\partial(\dot{q}_{\varepsilon+1}, \dot{q}_{\varepsilon+2}, \cdots, \dot{q}_n)} \neq 0 \quad (\varepsilon = n-g)$$

因此可解出

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta} = \dot{q}_{\varepsilon+\beta}(q_s, \dot{q}_\sigma, t) \quad (\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \quad (9\text{-}144)$$

将其对 t 求导，并消去 $\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$，我们有

$$\ddot{q}_{\varepsilon+\beta} = \ddot{q}_{\varepsilon+\beta}(q_s, \dot{q}_\sigma, \ddot{q}_\sigma, t) \qquad (9\text{-}145)$$

由速度空间的虚位移定义，有

$$\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}\delta\dot{q}_\sigma \qquad (9\text{-}146)$$

将(9-146)代入原理(9-141)，并注意到 $\delta\dot{q}_\sigma$ 是彼此独立的，我们得到方程

$$Q_\sigma + 2\frac{\partial T}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} + \sum_{\beta=1}^{g}\Big(Q_{\varepsilon+\beta} + 2\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}$$

$$- \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\Big)\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma} = 0 \quad (\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \qquad (9\text{-}147)$$

此方程可称为尼尔森形式的马基(Maggi)方程。

现在继续变换方程(9-147)。

令 $\tilde{T}$ 为利用约束方程(9-144)消去 $\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 而得的动能表达式，即

$$\tilde{T}(q_s, \dot{q}_\sigma, t) = T(q_s, \dot{q}_\sigma, \dot{q}_{\varepsilon+\beta}(q_s, \dot{q}_\sigma, t), t) \quad (9\text{-}148)$$

于是有

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_\sigma}=\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_\sigma} \tag{9-149}$$

令 $\tilde{\dot{T}}$ 为 T 中借助(9-144)消去 $\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 并借助(9-145)消去 $\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 得的表达式，即

$$\tilde{\dot{T}}(q_s,\dot{q}_\sigma,\ddot{q}_\sigma,t)=T(q_s,\dot{q}_\sigma,\dot{q}_{\varepsilon+\beta}(q_s,\dot{q}_\sigma,t),\ \ddot{q}_\sigma,\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}(q_s,\dot{q}_\sigma,\ddot{q}_\sigma,t),t)$$

于是有

$$\frac{\partial \tilde{\dot{T}}}{\partial \dot{q}_\sigma}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \dot{T}}{\partial \ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}$$

注意到

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \ddot{q}_s}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{9-150}$$

上式写成

$$\frac{\partial \tilde{\dot{T}}}{\partial \dot{q}_\sigma}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma} \tag{9-151}$$

将(9-149)和(9-151)代入方程(9-147)，我们得到

$$\frac{\partial \tilde{\dot{T}}}{\partial \dot{q}_\sigma}-2\frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\partial \ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}-2\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_\sigma}\right)$$

$$-2\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}=\tilde{Q}_\sigma\quad (\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{9-152}$$

其中

$$\tilde{Q}_\sigma=Q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}Q_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma} \tag{9-153}$$

方程(9-152)就是非完整力学系统广义坐标下的广义尼尔森方程。

现在研究方程(9-152)的特殊情形。

(1) 如果系统是保守的，力函数为U，拉格朗日函数为$L=T+U$，我们有

$$\frac{\partial\widetilde{\dot{L}}}{\partial\dot{q}_\sigma}=\frac{\partial\widetilde{\dot{T}}}{\partial\dot{q}_\sigma}+\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial U}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial\dot{q}_\sigma}$$

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_\sigma}=\frac{\partial\tilde{T}}{\partial q_\sigma}+\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}=\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}+\frac{\partial U}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}$$

$$\tilde{Q}_\sigma=\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial U}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial\dot{q}_\sigma}$$

方程(9-152)成为

$$\frac{\partial\widetilde{\dot{L}}}{\partial\dot{q}_\sigma}-2\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\partial\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial\dot{q}_\sigma}-2\frac{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_\sigma}\right)$$
$$-2\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial\dot{q}_\sigma}=0\quad(\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon)$$
$$(9\text{-}154)$$

特别地，如果L不依赖于$q_{\varepsilon+\beta}$，方程(9-154)成为

$$\frac{\partial\widetilde{\dot{L}}}{\partial\dot{q}_\sigma}-2\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\partial\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial\dot{q}_\sigma}-2\frac{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_\sigma}\right)=0$$
$$(\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon)\qquad(9\text{-}155)$$

(2) 如果约束是线性的，即

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\dot{q}_\sigma+B_{\varepsilon+\beta}$$

$$(\beta=1,2,\cdots,g;\ \varepsilon=n-g) \qquad (9\text{-}156)$$

其中 $B_{\varepsilon+\beta,\sigma}$ 和 $B_{\varepsilon+\beta}$ 是广义坐标和时间的函数。我们有

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_\sigma}=\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}\dot{q}_\nu+\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_\sigma}\\
&\frac{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial\dot{q}_\sigma}=B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\\
&\frac{\partial\ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial\dot{q}_\sigma}=\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}B_{\sigma;\nu}^{\varepsilon+\beta}\dot{q}_\nu+B_\sigma^{\varepsilon+\beta}
\end{aligned}\right\} \qquad (9\text{-}157)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
B_{\sigma;\nu}^{\varepsilon+\beta}=&\sum_{\gamma=1}^{g}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}B_{\varepsilon-\gamma,\nu}+\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}B_{\varepsilon+\gamma,\sigma}\right)\\
&+\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu}+\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}\\
B_\sigma^{\varepsilon+\beta}=&\sum_{\gamma=1}^{g}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}B_{\varepsilon+\gamma,\sigma}+\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}B_{\varepsilon+\gamma}\right)\\
&+\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial t}+\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_\sigma}
\end{aligned}\right\}$$

$$(9\text{-}158)$$

将(9-157)代入方程(9-152)，我们得到

$$\frac{\partial\widetilde{\dot{T}}}{\partial\dot{q}_\sigma}-2\frac{\partial\tilde{T}}{\partial q_\sigma}=\tilde{Q}_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left\{\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\left(B_{\sigma;\nu}^{\varepsilon+\beta}-2\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}\right)\dot{q}_\nu+B_\sigma^{\varepsilon+\beta}-2\frac{B_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_\sigma}\right\}$$

$$+2\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\ (\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \qquad (9\text{-}159)$$

(3) 如果约束是线性的、齐次的且不依赖于时间 t，系

数 $B_{\varepsilon+\beta,\sigma}$ 和动能 T 都不依赖于 $q_{\varepsilon+\beta}$，则

$$B_{\varepsilon+\beta}=0,\qquad B_{\sigma\nu}^{\varepsilon+\beta}=\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu}+\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}$$

$$B_\sigma^{\varepsilon+\beta}=0,\qquad \frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}=0$$

方程(9-159)变成

$$\frac{\partial \widetilde{\dot{T}}}{\partial \dot{q}_\sigma}-2\frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_\sigma}=\tilde{Q}_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\nu}-\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}\right)\dot{q}_\nu\qquad(\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon)\qquad(9\text{-}160)$$

(4) 如果约束是完整的，则方程(9-152)变成尼尔森方程(9-142)。

3. 例题

一质量为m的质点在力 $\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}$ 的作用下沿平面 XOY 运动，所受约束为 $\dot{y}=t\dot{x}$(点的轨迹的斜率与时间成比例)，试建立点的运动微分方程。

解： 我们应用方程(9-152)。点的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

因此 $\qquad \dot{T}=m(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}),\qquad \tilde{T}=\frac{1}{2}m(1+t^2)\dot{x}^2$

$$\widetilde{\dot{T}}=m[\dot{x}\ddot{x}+t\dot{x}(t\ddot{x}+\dot{x})],\quad \frac{\partial \widetilde{\dot{T}}}{\partial \dot{x}}=m[\ddot{x}+t^2\ddot{x}+2t\dot{x}]$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial T}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}}=m\dot{y}=mt\dot{x}$$

因 $\dot{y}=t\dot{x}$，所以 $\ddot{y}=\dot{x}+t\ddot{x}$

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{x}}=t, \qquad \frac{\partial \dot{y}}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{x}}=1$$

方程(9-152)给出

$$\frac{\partial \tilde{\dot{T}}}{\partial \dot{x}}-2\frac{\partial \dot{T}}{\partial x}-\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\left(\frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{x}}-2\frac{\partial \dot{y}}{\partial x}\right)-2\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{x}}$$

$$=F_x+F_y\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{x}}$$

即 $$m(\ddot{x}+t^2\ddot{x}+2t\dot{x})-mt\dot{x}\cdot 1=F_x+F_y t$$

或 $$m[(1+t^2)\ddot{x}+t\dot{x}]=F_x+F_y t$$

第九章　习　　题

9-1 如第一节中例2的平面 XOY 以常角速度 Ω 绕轴 OZ 转动，试列写圆球运动的约束方程。

9-2 试用罗兹方程建立：(1)圆盘在重力作用下沿粗糙水平面滚动的运动微分方程；(2)第一节中例5的运动微分方程，设两质点受力为 F_{1x}，F_{1y}，F_{2x}，F_{2y}。

9-3 试说明第一节中例4不是查浦雷金系统，因此不能应用查浦雷金方程。

9-4 试用查浦雷金方程(9-81)建立匀质圆球沿水平面纯滚动的运动方程，设力函数为 $U(x,y)$。

9-5 试用阿沛尔方程建立查浦雷金——卡拉提奥多里问题的运动微分方程。

9-6 利用哈密顿原理（8-75）导出该问题的运动微分方程。

参 考 文 献

[1] 胡助《分析力学》，北京工业学院，1963年。

[2] 汪家訸《分析动力学》,高等教育出版社,1958年。

[3] 吴镇《分析力学》，上海交通大学，1984年。

[4] 王光远《应用分析动力学》，人民教育出版社，1981年。

[5] 陈滨《分析动力学》，北京大学出版社，1984年。

[6] Ф. Р. 甘特马赫《分析力学讲义》，钟奉俄、薛问西译，高等教育出版社，1964年。

[7] 周衍柏《理论力学》，江苏科技出版社，1961年。

[8] 朱照宣，周起钊，殷金生《理论力学》下册，北京大学出版社，1982年。

[9] 北京大学固体力学教研室《理论力学补充教材》，高等教育出版社，1961年。

[10] Н. Н. 蒲赫哥尔茨《理论力学基本教程》,钱尚武、钱敏译，商务印书馆，1954年。

[11] Н. Н. 蒲赫哥尔茨《理论力学习题集》，商务印书馆，1954年。

[12] А. И. Лурье, «Аналитическая механика», М, 1961.

[13] В. В. Добронравов, «Основы аналитической Механики», М, 1976.

[14] И. М. Беленький, «Введение В Аналитическую Механику», М, 1964.

[15] Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев, «Динамика

Неголономных Систем», М, 1967.

[16] Е. Пятницкий, Н. Трухан, Ю. Ханукаев, Г. Яковенко, «Сборник По аналитической Механике», М, 1980.

[17] E. T. Whittaker, «A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies», Cambridge University Press, 1937.

[18] L. A. Pars, «A Treatise on Analytical Dynamics», Heinemann, 1965.

[19] E. A. Desloge, «Classical Mechanics», John Wiley and Sons, 1982.

[20] R. M. Santilli, «Foundations of Theoretical Mechanics I», Springer-verlag, 1978.

[21] P. Appell, «Traité de Mécanique Rationnelle» t. 1, t. 2, Paris, 1953.

[22] Y. Pironneau, «Mécanique Générale», E. N. S. M, Nantes, 1982.

[23] G. Hamel, «Theoretische Mechanik» Berlin. 1949.

[24] 牛青萍，经典力学的基本微分原理与不完整力学组的运动方程，《力学学报》1964年第二期。

[25] 梅凤翔，非完整系统力学中的交换关系，《力学与实践》1979年第三期。

[26] 梅凤翔，非完整系统力学的历史与现状，《力学与实践》1979年第四期。

[27] 梅凤翔，非完整力学系统的广义 Nielsen 方程，

《力学与实践》1980年第三期。

[28] Mei Fengxiang, Nouvelles équations du mouvement des Systèmes mécaniques non holonomes, Thése d'Etat, Nantes, France, Mai, 1982.

[29] 梅凤翔，对不稳定的约束实位移不是虚位移中的一个吗？《力学与实践》1984年第五期。

[30] 梅凤翔，分析力学中的 Nielsen 算子和 Euler 算子，《力学学报》1984年第六期。

[31] 杨来伍，《变质量体力学》，北京工业学院，1982年。

[32] В. В. Румянцев, О Некоторых Вариационных Принципах Механики. Современные Проблемы Теор. И Прикл. Механики, Труды IV Всесоюзного Съезда По Т. П. М. 1978.

[33] В. И. Киргетов., ОБ Уравнениях Движения Упраляемых Механических Систем. П. М. М, Т. 28, Вып 2, 1964.

[34] H. Beghin, Cours de Mécanique théorique et appliquée, Paris, 1952.

[35] 梅凤翔、刘桂林，非线性非完整约束系统的相对运动动力学，上海国际非线性力学会议，1985年。

[36] 梅凤翔，《非完整系统力学基础》，北京工业学院出版社，1985年。

[37] И. Ценов, Об Одной Форме Уравнений Аналитической Механики, ДАНСССР Т. 89, Но. 1, 1953.